# Модуль 1. Матриці. Дії над матрицями

## Структура модуля

# Вступ

## Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 1.1—1.4) і розширеному (розділи 1.1—1.5).

У модулі:

— розглянуто матриці — важливий математичний інструмент, який широко застосовують як у математиці, так і в інженерних дисциплінах;

— запроваджено лінійні і нелінійні дії над матрицями;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

# Теоретична частина

## 1.1. Матриці

### 1.1.1. Основні поняття

**Означення 1.1.** *Матрицею* $A$ *розміром* $m \times n$ звуть набір $mn$ чисел — *елементів матриці*

$$a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

розташованих у прямокутній таблиці з $m$ рядків та $n$ стовпців.

$$A = A_{m \times n} = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Символ $a_{ij}$ читають як «а-і-жі».

Елементи матриці нумерують двома індексами, які вказують «адресу» елемента — верхній індекс зазначає номер рядка, а нижній — номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент. Отже, елемент $a_{ij}$ розташовано в $i$-му рядку та в $j$-му стовпці матриці $A$.

Приміром, у матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

розміром $2 \times 3$, елемент $a_{11} = 1$ та елемент $a_{23} = 6$.

Матрицю розміром $1 \times 1$, яка містить один елемент, ототожнюють із цим елементом.

Набір елементів

$$\begin{Vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} \left\| a_{ij} \right\|_{*n} \overset{\text{den}}{=} \overleftarrow{a}_i$$

звуть $i$-*м рядком* (завдовжки $n$) матриці $A$, а набір

$$\begin{Vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} \left\| a_{ij} \right\|_{m*} \overset{\text{den}}{=} \vec{a}_j.$$

звуть $j$-*м стовпцем* (заввишки $m$) матриці $A$.

Приміром, для матриці $A$ (1.1) перший рядок

$$\overleftarrow{a}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix},$$

а третій стовпець

$$\vec{a}_3 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 6 \end{Vmatrix}.$$

Матрицю можна вважати рядком стовпців або стовпцем рядків.

$$A_{m\times n}=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}=\begin{Vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n\\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\overleftarrow{a}_1 & \to\\ \overleftarrow{a}_2 & \to\\ \dots & \\ \overleftarrow{a}_m & \to\end{Vmatrix}.$$

### 1.1.2. Типи матриць

1. Матрицю розміром $m\times n$, усі елементи якої нулі, звуть *нульовою матрицею* (позначають $O_{m\times n}$).

2. Якщо $m=n$, то матрицю $A$ звуть *квадратною матрицею порядку* $n$. Набір елементів $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ утворює *головну діагональ*, а набір $a_{n1},a_{n-12},\dots,a_{1n}$ — *побічну діагональ*.

Приміром, матриця

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{Vmatrix}$$

— квадратна матриця 3-го порядку; елементи $1,5,9$ творять головну діагональ, а елементи $7,5,3$ — побічну.

3. Квадратну матрицю, всі елементи якої нижче (вище) головної діагоналі дорівнюють нулеві, звуть *верхньою* (*нижньою*) *трикутною матрицею* (рис. 1.1).

$$\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix}\qquad\qquad\begin{Vmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix}$$

Рис. 1.1

4. Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві, звуть *діагональною матрицею* (рис. 1.2).

$$\begin{Vmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix}$$

Рис. 1.2

5. Діагональну матрицю порядку $n$, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, звуть *одиничною матрицею* і позначають

$$E_n = \begin{Vmatrix} 1 & & \text{0} \\ & \ddots & \\ \text{0} & & 1 \end{Vmatrix}_{n \times n}.$$

Приміром,

$$E_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6. Матрицю розміром $1 \times n$ звуть *матрицею-рядком* ($\Leftrightarrow$ рядком) завдовжки $n$.

7. Матрицю розміром $m \times 1$ звуть *матрицею-стовпцем* ($\Leftrightarrow$ стовпцем) заввишки $m$.

### 1.2. Лінійні дії над стовпцями (рядками) матриці

*Лінійними діями* звуть додавання та множення на число. Оскільки надалі доведеться додавати стовпці (рядки) матриці та множити всі елементи деякого стовпця (рядка) на одне й те саме число, розгляньмо ці дії над стовпцями (рядками).

Нехай задано два стовпці $\vec{x} = \|x_i\|_m$ та $\vec{y} = \|y_i\|_m$ .

Два стовпці $\vec{x}$ та $\vec{y}$ звуть *рівними*, якщо вони мають однакову висоту і рівні поелементно:

$$\boxed{\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, i = \overline{1,m}} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{Vmatrix} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_m = y_m. \end{matrix}$$

*Сумою* двох *стовпців* $\vec{x}$ та $\vec{y}$ однакової висоти звуть стовпець, кожен елемент якого дорівнює сумі відповідних елементів стовпців-доданків:

$$\boxed{\vec{x} + \vec{y} \overset{\text{def}}{=} \|x_i + y_i\|^m} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_m + y_m \end{Vmatrix}.$$

*Добутком стовпця $\vec{x}$ на число* $\alpha$ звуть стовпець, кожен елемент якого дорівнює відповідному елементові стовпця $\vec{x}$, помноженому на це число:

$$\boxed{\alpha\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \|\alpha x_i\|_m} \Leftrightarrow \alpha \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_m \end{Vmatrix}.$$

Під *різницею* $\vec{x} - \vec{y}$ стовпців $\vec{x}$ та $\vec{y}$ однакової висоти розуміють стовпець $\vec{x} + (-1)\vec{y}$; *нульовим стовпцем* $\vec{0}$ звуть стовпець, усі елементи якого дорівнюють нулеві.

Так само запроваджують поняття рівності рядків, дій додавання та множення рядка на число.

**Означення 1.2.** *Лінійною комбінацією стовпців* $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ однакової висоти з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ звуть стовпець (рис. 1.4)

$$\boxed{\vec{y} \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \overset{\text{den}}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k.}$$

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{Vmatrix} = \alpha_1 \begin{Vmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{m1} \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{m2} \end{Vmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{Vmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Рис. 1.4

Так само означують лінійну комбінацію рядків.

### 1.3. Лінійні дії над матрицями

Означимо дії з матрицями, розглядаючи їх і як набори чисел з двома індексами, і як рядки стовпців (стовпці рядків) їхніх елементів.

Нехай

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} = \left\| \vec{a}_j \right\|_n = \left\| \overleftarrow{a}_i \right\|_m,$$

$$B = \left\| b_{ij} \right\|_{m \times n} = \left\| \vec{b}_j \right\|_n = \left\| \overleftarrow{b}_i \right\|_m.$$

**Означення 1.3.** Матриці $A$ та $B$ звуть *рівними,* якщо вони:
1) однакового розміру;
2) рівні поелементно (постовпцево, порядково).

$$\boxed{A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n};}$$

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \vec{a}_j = \vec{b}_j, j = \overline{1,n};$$

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overleftarrow{a}_i = \overleftarrow{b}_i, i = \overline{1,m}.$$

**Означення 1.4.** *Сумою матриць* $A$ та $B$ однакового розміру звуть матрицю $A + B$, кожен елемент (стовпець, рядок) якої дорівнює сумі відповідних елементів (стовпців, рядків) матриць-доданків:

$$\boxed{A + B \overset{\text{def}}{=} \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|_{mn}} \overset{\text{def}}{=} \left\| \vec{a}_j + \vec{b}_j \right\|_n \overset{\text{def}}{=} \left\| \overleftarrow{a}_i + \overleftarrow{b}_i \right\|_m.$$

Приміром,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & 3 + 1 \\ 4 + 2 & 5 + (-3) & 6 + 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{Vmatrix}.$$

**Означення 1.5.** *Добутком матриці* $A$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ звуть матрицю $\alpha A$, кожен елемент (стовпець, рядок) якої дорівнює добуткові числа $\alpha$ на елемент (стовпець, рядок,) матрицi $A$:

$$\boxed{\alpha A \overset{\text{def}}{=} \|\alpha a_{ij}\|_{m\times n}} \overset{\text{def}}{=} \|\alpha \vec{a}_j\|_n \overset{\text{def}}{=} \|\alpha \overleftarrow{a}_i\|_m .$$

Приміром,

$$2\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot(-2)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3\\ 2\cdot(-4) & 2\cdot 5\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}2 & -4\\ 0 & 6\\ -8 & 10\end{Vmatrix}.$$

Під *різницею матриць* $A$ та $B$ однакового розміру розуміють матрицю

$$A + (-B) \overset{\text{den}}{=} A - B,$$

де $-B = (-1)B$ — *протилежна* до $B$ *матриця*.

Додавання матриць та множення матриці на число, які звуть *лінійними діями над матрицями*, мають властивості (для довільних $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n}$ та чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

1) $A + B = B + A$ (комутативність додавання матриць);
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативність додавання матриць);
3) $A + O_{m\times n} = A$ (існування нульової матриці);
4) $A + (-A) = O_{m\times n}$ (існування протилежної матриці);
5) $1 \cdot A = A$;
6) $(\alpha + \beta)\cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ (дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел);
7) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання матриць);
8) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta)\cdot A$ (асоціативність множення матриці на число).

Під лінійною комбінацією матриць однакового розміру $A$ та $B$ з коефіцієнтами $\alpha$ та $\beta$ звуть матрицю

$$\alpha A + \beta B.$$

### 1.4. Нелінійні дії над матрицями

#### 1.4.1. Множення матриць

Означимо спершу дію множення рядка на стовпець.

*Добутком рядка* $\overleftarrow{x} = \|x_j\|_n$ *на стовпець* $\vec{y} = \|y_i\|_n$ звуть число, яке дорівнює сумі добутків відповідних елементів:

$$\boxed{\overleftarrow{x}\cdot\vec{y} \overset{\text{def}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \overset{\text{den}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_ky_k.}$$

$$\begin{Vmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n\end{Vmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Рис. 1.5

Приміром,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{Vmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 8.$$

Матриці $A$ та $B$ звуть *узгодженими*, якщо кількість стовпців матриці $A$ дорівнює кількості рядків матриці $B$ ($\Leftrightarrow$«довжина» матриці $A$ дорівнює «висоті» матриці $B$).

Приміром, матриці

$$A_{3\times 2} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix} \text{ та } B_{2\times 2} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}$$

узгоджені, бо рядок матриці $A$ та стовпець матриці $B$ містить по два елементи; матриці $B_{2\times 2}$ та $A_{3\times 2}$ — неузгоджені, бо рядок матриці $B$ містить два елементи, а стовпець матриці $A$ — три елементи.

***Означення 1.6.*** *Добутком* узгоджених *матриць* $A_{m\times l}$ та $B_{l\times n}$ звуть матрицю $C_{m\times n} = A \cdot B$, кожний елемент $c_{ij}, i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, якої дорівнює добуткові $i$-го рядка матриці $A$ на $j$-й стовпець матриці $B$ (рис. 1.6):

$$\boxed{A_{m\times l} \cdot B_{l\times n} = C_{m\times n} = \left\| c_{ij} \right\|_{mn} \overset{\text{def}}{=} \left\| \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_j \right\|_{mn}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il}b_{lj} = \sum_{s=1}^{l} a_{is}b_{sj},$$

$$i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \overleftarrow{a}_i \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{matrix} \right\| \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{b_{11}} & \phantom{\vdots} & \vec{b}_j & \phantom{\vdots} & \phantom{b_{1n}} \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} b_{11} & \vdots & b_{1j} & \vdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{l1} & \vdots & b_{lj} & \vdots & b_{ln} \end{matrix} \right\| \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{c_{11}} & j\text{-й ст.} & \phantom{c_{1n}} \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} c_{11} & \vdots & c_{1n} \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ c_{m1} & \vdots & c_{mn} \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{array}{l} \\ i\text{-й р.} \\ \end{array}$$

Рис. 1.6

Приміром,

$$AB = \begin{Vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & \boxed{4} & 5 \\ 6 & \boxed{0} & -2 \\ 7 & \boxed{1} & 8 \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\Vert \begin{array}{c:c:c} 1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & \boxed{1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1} & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8 \\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8 \end{array} \right\Vert =$$

$$= \begin{Vmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{Vmatrix}.$$

**_Зауваження 1.1._**

1. Множення матриць не комутативне! Тобто, якщо існує добуток $AB$, то може не існувати добуток $BA$, але, навіть, коли існують обидва — вони можуть не бути рівними. Приміром,

$$AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$BA = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$AB \neq BA.$$

2. Бачимо, крім того, що добуток ненульових матриць виявився нульовою матрицею!

Якщо які-небудь матриці $A$ та $B$ справджують співвідношення $AB = BA$, то їх звуть *переставними*.

З узгодженості матриць випливає, що переставними можуть бути лише квадратні матриці.

Одинична матриця $E_n$ та нульова матриця $O_n$ порядку $n$ переставні з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку:

$$AE_n = E_nA = A;$$

$$O_nA = AO_n = O_n.$$

Слушність запровадженого множення матриць можна обґрунтувати (див. *п. 1.5.1*).

**_Вправа 1.1._**

Переконатись, що:

1) стовпець $A\vec{x}$ є лінійною комбінацією стовпців матриці $A$ з коефіцієнтами — елементами стовпця $\vec{x}$;

2) $j$-й стовпець матриці $AB$ є лінійною комбінацією стовпців матриці $A$ з коефіцієнтами, рівними елементам $j$-го стовпця матриці $B$;

3) $i$-й рядок матриці $AB$ є лінійною комбінацією рядків матриці $B$ з коефіцієнтами, рівними елементам $i$-го рядка матриці $A$.

Розв'язання вправи 1.1 див. у *п. 1.5.2.*

Множення матриць (для довільних узгоджених матриць $A, B, C$ та числа $\lambda \in \mathbb{R}$) має властивості :

1) $A_{m\times n}\cdot(B_{n\times l}\cdot C_{l\times p}) = (A\cdot B)\cdot C$ (асоціативність множення матриць);

2) $C_{l\times m}\cdot(A_{m\times n} + B_{m\times n}) = C\cdot A + C\cdot B$,
$(A_{m\times n} + B_{m\times n})\cdot C_{n\times l} = A\cdot C + B\cdot C$ (дистрибутивність множення матриць щодо додавання матриць);

3) $\lambda(A_{m\times n}\cdot B_{n\times l}) = (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)$ (дистрибутивність множення матриць щодо множення на число);

4) $A_{m\times n}\cdot E_n = E_m\cdot A_{m\times n} = A$ (існування одиничної матриці);

5) $A_{m\times n}\cdot O_{n\times l} = O_{m\times l}$; $O_{l\times m}\cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}$ (існування нульової матриці).

Матрицю $A$ можна помножити саму на себе тоді й лише тоді, коли вона квадратна. Натуральний степінь $k$ квадратної матриці $A$ розуміють як

$$A^k = \underbrace{AA...A}_{k \text{ разів}}.$$

Якщо

$$f(x) = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0,$$

то многочленом від матриці $f(A)$ ($\Leftrightarrow$*матричним многочленом*) звуть вираз

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} a_k A^k + ... + a_1 A + a_0 E_n \quad (A^0_{n\times n} = E_n).$$

### 1.4.2. Транспонування матриць

Дію, яка переводить рядок у стовпець, і навпаки, звуть *транспонуванням* і позначають

$$\overleftarrow{x} \xrightarrow{T} \vec{x}, \quad \vec{x} \xrightarrow{T} \overleftarrow{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{Vmatrix} \xrightarrow{T} \begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} \xrightarrow{T} \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{Vmatrix}.$$

Приміром,

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} \xrightarrow{T} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

**Означення 1.7.** *Транспонованою матрицею* $A^T$ *до матриці*

$$A = \|a_{ij}\|_{mn} = \|\vec{a}_j\|_n = \|\overleftarrow{a}_i\|_m = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

звуть матрицю

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} A^T.$$

Отже,

$$B = A^T \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = A^T \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \vec{b}_j = \overleftarrow{a}_j, \quad j = \overline{1,n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = A^T \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overleftarrow{b}_i = \vec{a}_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Приміром, якщо

$$A_{2\times 3} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix} = B_{3\times 2}.$$

Тобто стовпці (рядки) матриці $A$ перетворились на рядки (стовпці) матриці $A^T$.

Транспонування матриць має властивості:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Отже,

$$(\vec{x}^T)^T = \vec{x}, (\overleftarrow{x}^T)^T = \overleftarrow{x}.$$

***Вправа 1.2.*** Довести, що $(AB)^T = B^T A^T$.

Розв'язання вправи 1.2 див. у *п. 1.5.3.*

Матрицю $A$ звуть *симетричною*, якщо $A^T = A$ і *кососиметричною*, якщо $A^T = -A$.

Добуток $C = AA^T$ кожної матриці на транспоновану до неї матрицю є симетричною матрицею, оскільки

$$C^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T = C.$$

### 1.4.3. Обернення матриць

Ділення для матриць не запроваджують, але можливо побудувати аналог ділення для матриць — множення на обернену матрицю.

**Означення 1.8.** Матрицю $A_{n\times n}$ звуть *оборотною*, якщо існує матриця $B$:
$$AB = BA = E_n.$$
Матрицю $B$ звуть *оберненою до матриці* $A$ і позначають
$$B \overset{\text{den}}{=} A^{-1}.$$
Матриці $A$ та $B$ — *взаємообернені*.

**Зауваження 1.2.** 1. Взаємообернені матриці — переставні.
2. Оскільки $E_n E_n = E_n$, то $(E_n)^{-1} = E_n$.

**Теорема 1.1.** Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

► Нехай матриці $A_1^{-1}, A_2^{-1}$ обернені до $A_{n\times n}$. Тоді
$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E_n = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = E_nA_2^{-1} = A_2^{-1}.◄$$

Обернення матриць (для оборотних матриць $A$ та $B$) має властивості:
1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Доведення властивостей 3) та 4) див. у *п. 1.5.4.*

З'ясування умови оборотності матриці і знаходження оберненої матриці вимагає вивчення важливих характеристик матриці — визначника матриці та рангу матриці, які будуть запроваджені в наступних модулях.

**Зауваження 1.3.** Множина матриць є розширенням множини дійсних чисел, але в такій розширеній множині втрачено комутативність множення.

**Вправа 1.3.** Задано матрицю $A(\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$. Довести, що:
1) $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta)$;
2) $A^{-1}(\alpha) = A(-\alpha)$;
3) $A^{-1}(\alpha) = A^T(\alpha)$.

Розв'язання вправи 1.3 див. у *п. 1.5.5.*

## 1.5. Додаткові відомості

### 1.5.1. Обґрунтування слушності запровадженого множення матриць

Означення добутку матриць формулюють складніше і здається менш природнім, аніж означення суми. Подане означення (можливі й інші) широко застосовують.

1. Добуток квадратної матриці $A$ порядку $m$ на стовпець $\vec{x}$ заввишки $m$ є стовпцем заввишки $m$:

$$A\vec{x} = \left\| \overleftarrow{a}_i \right\|_m \vec{x} = \left\| \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \longrightarrow \\ \overleftarrow{a}_2 \longrightarrow \\ \dots \\ \overleftarrow{a}_m \longrightarrow \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \vec{x} \\ \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{x} \\ \dots \\ \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{x} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m \end{matrix} \right\|.$$

У зворотному порядку ці матриці перемножити не можна, тобто добуток $\vec{x}A$ не означений.

2. Добуток рядка завдовжки $n$ на квадратну матрицю $A$ порядку $n$ є рядком завдовжки $n$:

$$\overleftarrow{x}A = \overleftarrow{x} \left\| \vec{a}_j \right\|_n = \left\| \overleftarrow{x} \longrightarrow \right\| \left\| \begin{matrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{matrix} \right\| = \left\| \overleftarrow{x} \cdot \vec{a}_1 \quad \overleftarrow{x} \cdot \vec{a}_2 \quad \dots \quad \overleftarrow{x} \cdot \vec{a}_n \right\|.$$

3. Добуток стовпця заввишки $m$ на рядок завдовжки $n$ є матрицею розміром $m \times n$:

$$\vec{x} \cdot \overleftarrow{y} = \left\| a_{ij} \right\|_{mn},$$

де $a_{ij} = x_i y_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$

4. Перехід від змінних $x_1, x_2$ до змінних $y_1, y_2$ за формулами

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

звуть лінійним перетворенням змінних $x_1, x_2$.

Під добутком двох лінійних перетворень розуміють послідовне застосуванням цих перетворень. Так, якщо до перетворення

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

з матрицею

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

застосувати лінійне перетворення

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{cases}$$

з матрицею

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\|$$

і змінні $z_1$ та $z_2$ виразити через $x_1$ та $x_2$, то перше перетворення буде помножене на друге. Результатом такого послідовного застосування перетворень (добутком перетворень) буде:

$$\begin{cases} z_1 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2, \\ z_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2. \end{cases}$$

Матрицю добутку перетворень слушно взяти за добуток матриць перетворень, причому справа запишімо матрицю першого перетворення:

$$BA = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Отже, матриця у правій частині цієї рівності відповідає *означенню 1.6*, що й «виправдовує» саме таке означення добутку двох матриць.

### 1.5.2. Розв'язання вправи 1.1

1)

$$A\vec{x} = \|\overleftarrow{a}_i\|_m \vec{x} = \begin{Vmatrix} \overleftarrow{a}_1 \longrightarrow \\ \overleftarrow{a}_2 \longrightarrow \\ \dots \\ \overleftarrow{a}_m \longrightarrow \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \vec{x} \\ \\ \downarrow \\ \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{x} \\ \dots \\ \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{x} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m \end{Vmatrix} = x_1 \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{Vmatrix} + x_2 \begin{Vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{Vmatrix} + \dots + x_m \begin{Vmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{mm} \end{Vmatrix} =$$

$$= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m.$$

2) $C = A_{m\times l}B_{l\times n} = \|\vec{c}_j\|_n ; \forall j = \overline{1,n}$ :

$$\vec{c}_j = \begin{Vmatrix} \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_j \\ \dots \\ \overleftarrow{a}_m \cdot \vec{b}_j \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1l}b_{lj} \\ \dots \\ a_{m1}b_{1j} + a_{m2}b_{2j} + \dots + a_{ml}b_{lj} \end{Vmatrix} =$$

$$= b_{1j} \begin{Vmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{Vmatrix} + b_{2j} \begin{Vmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{m2} \end{Vmatrix} + \dots + b_{lj} \begin{Vmatrix} a_{1l} \\ \dots \\ a_{ml} \end{Vmatrix} =$$

$$= b_{1j}\vec{a}_1 + b_{2j}\vec{a}_2 + \dots + b_{lj}\vec{a}_l.$$

3) $C = A_{m\times l}B_{l\times n} = \|\overleftarrow{c}_i\|_m ; \forall i = \overline{1,m}$ :

$$\overleftarrow{c_i} = \left\| \overleftarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{b_1} \quad \ldots \quad \overleftarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{b_n} \right\| =$$

$$= \left\| a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{il}b_{l1} \quad \ldots \quad a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \ldots + a_{il}b_{ln} \right\| =$$

$$= a_{i1} \left\| b_{11} \quad \ldots \quad b_{1n} \right\| + a_{i2} \left\| b_{21} \quad \ldots \quad b_{2n} \right\| + \ldots + a_{il} \left\| b_{l1} \quad \ldots \quad b_{ln} \right\| =$$

$$= a_{i1}\overleftarrow{b_1} + a_{i2}\overleftarrow{b_2} + \ldots + a_{il}\overleftarrow{b_l}.$$

### 1.5.3. Розв'язання вправи 1.2

Справді, в матриці $(AB)^T$ елемент, що стоїть на перетині $i$-го рядка та $j$-го стовпця, дорівнює елементові матриці $AB$, що стоїть на перетині $j$-го рядка та $i$-го стовпця, тобто сумі

$$\sum_{s=1}^{l} a_{js}b_{si}.$$

Але цей вираз — сума добутків елементів $i$-го рядка матриці $B^T$ на відповідні елементи $j$-го стовпця матриці $A^T$, тобто дорівнює елементові з «адресою» $(i, j)$ матриці $B^T A^T$.

### 1.5.4. Доведення властивостей оберненої матриці

3) $E_n = AA^{-1} = AE_nA^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1})$,

$$E_n = (B^{-1}A^{-1})(AB) \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4) $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \Rightarrow (AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (E_n)^T = E_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T A^T = A^T(A^{-1})^T = E_n \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

### 1.5.5. Розв'язання вправи 1.3

1) $A(\alpha)A(\beta) =$

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) & (-\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \\ (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) & (-\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{Vmatrix} = A(\alpha+\beta);$$

2) $A(-\alpha)A(\alpha) =$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$A(\alpha)A(-\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow A^{-1}(\alpha) = A(-\alpha);$$

3) $A^T =$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} = A(-\alpha) = A^{-1}(\alpha).$$