Модуль 2. Визначники

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретична частина

Розділ 2.1. Визначники
2.1.1. Індуктивне означення
2.1.2. Формули обчислення визначників матриць 2-го та 3-го порядку
2.1.3. Розклад визначника за будь-яким рядком чи стовпцем
2.1.4. Властивості визначника
Розділ 2.2. Лінійна залежність та незалежність стовпців (рядків) матриці
2.2.1. Основні означення
2.2.2. Умови лінійної залежності стовпців (рядків)
Розділ 2.3. Методи обчислення визначників
2.3.1. Метод зведення визначника до трикутного вигляду
2.3.2. Метод опорного елементу (мінорів 2-го порядку)
2.3.3. Обчислення визначника за його властивостями
Розділ 2.4. Додаткові відомості
2.4.1. Еквівалентне означення визначника
2.4.2. Розв’язання вправи 2.1
2.4.3. Доведення твердження 2.2
2.4.4. Доведення властивості 4 визначника
2.4.5. Доведення властивості 5 визначника
2.4.6. Доведення властивості 6 визначника
2.4.7. Розв’язання вправи 2.2
2.4.8. Доведення наслідків з теореми 2.1
2.4.9. Матриці елементарних перетворень
2.4.10. Обчислення Вандермондового визначника

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 2.1—2.3) і розширеному (розділи 2.1—2.4).

У модулі:

— розглянуто визначник — важливу числову характеристику матриці;

— вивчено основні властивості визначника;

— подано практичні методи обчислення визначника;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

2.1. Визначники

2.1.1. Індуктивне означення

Розгляньмо довільну *квадратну матрицю* n-го порядку
$$A = \|a_{ij}\|_{n\times n} = \|\vec{a}_j\|_n .$$

З кожною такою матрицею зв'яжімо цілком певну числову характеристику — її визначник.

Означення 2.1. *Визначником* ($\Leftrightarrow$ *детермінантом*) матриці A звуть число $|A| \overset{\text{den}}{=} \det A$, яке обчислюють за правилом:
1. При $n=1$: $|a_{11}| = a_{11}$. Тобто визначник матриці з одного елемента дорівнює самому елементові.
2. При $n>1$:
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$
де M_{1k} — визначник матриці порядку $(n-1)$, яку одержимо з матриці A викреслюванням 1-го рядка та k-го стовпця.

Визначник, одержаний викреслюванням із заданого визначника i-*го рядка* та j-*го стовпця* (*Матриця*)звуть *доповняльним мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij}.

Таким чином визначник матриці порядку n означують через визначники матриць порядку $n-1$.

Еквівалентне означення визначника див. у *п. 2.4.1.*

2.1.2. Формули обчислення визначників матриць 2-го та 3-го порядку

У подальшому під елементами, рядками та стовпцями визначника розумітимемо елементи, рядки та стовпці відповідної матриці.

Для $n=2$ (використовують схему — рис. 2.1):
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Рис. 2.1

Для $n=3$ (використовують схему — *правило Саррюса* — рис. 2.2):
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,(-1)^2\,M_{11} + a_{12}\,(-1)^3\,M_{12} + a_{13}\,(-1)^4\,M_{13}. \quad (2.1)$$

Знайдімо доповняльні мінори і підставмо їх у рівність (2.1)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

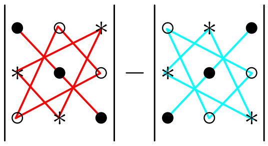

Рис. 2.2

2.1.3. Розклад визначника за будь-яким рядком чи стовпцем

Природно виникає питання — чи не можна для обчислення визначника скористатись елементами і відповідними їм доповняльними мінорами не першого, а довільного рядка чи стовпця?

Методом математичної індукції (*Принцип математичної індукції*) можна довести

Твердження 2.1.

Для кожної квадратної матриці A n-го порядку при довільному i $(1 \le i \le n)$ правдива формула, яку звуть *розкладом визначника за i-м рядком*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik};$$

та при довільному j $(1 \le j \le n)$ — формула, яку звуть *розкладом визначника за j-м стовпцем*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

Число

$$\boxed{A_{ij} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

звуть *алгебричним доповненням елемента* a_{ij}.

Приміром,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & b & c \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = a(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + c(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 4 & b \\ -3 & -5 & c \end{vmatrix} = a(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + c(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}.$$

Зауваження 2.1. 1. Визначник *верхньої (нижньої) трикутної матриці* (*Трикутна матриця*) дорівнює добуткові діагональних елементів.
2. Визначник одиничної матриці E_n дорівнює 1.

Вправа 2.1. Довести, що:
1. Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добуткові діагональних елементів.
2. Визначник *одиничної матриці* E_n дорівнює 1.

Розв'язання вправи 2.1. див. у *п. 2.4.2.*

2.1.4. Властивості визначника

Визначники мають низку важливих властивостей, які допомагають ефективно їх обчислювати та цікаві у прикладних задачах.

Властивість 1 (***рівноправність рядків та стовпців***). Транспонування матриці не міняє її визначника:

$$\boxed{\det A = \det A^T.}$$

Ця властивість випливає із твердження 2.1 (розклад визначника матриці A за 1-м рядком збігається з розкладом визначника матриці A^T за 1-м стовпцем).

Приміром,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Ця властивість означає, що якщо правдиве яке-небудь твердження про стовпці визначника, то правдиве те саме твердження про рядки визначника, і дозволяє подальші властивості доводити лише для стовпців.

Твердження 2.2. Якщо i-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією стовпців $\vec{p}$ та $\vec{q}$: $\vec{a}_i = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, то

$$\det A = \alpha \det A_p + \beta \det A_q,$$

де матриці A_p та A_q одержані з матриці A заміною i-го стовпця відповідно на стовпці $\vec{p}$ та $\vec{q}$.

Доведення див. у *п. 2.4.3.*

З твердження 2.2 випливає

Властивість 2 (*лінійність*) $(\alpha = \beta = 1)$. Якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то він дорівнює сумі відповідних визначників.

Приміром,

$$\begin{vmatrix} a & c_1 + c_2 \\ b & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c_1 \\ b & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c_2 \\ b & d_2 \end{vmatrix}.$$

Властивість 3 (*однорідність*) $(\alpha = 1, \beta = 0)$. Спільний множник стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника.

Приміром,

$$\begin{vmatrix} a & kc \\ b & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Властивість 4 (*антисиметричність*). Якщо переставити два стовпці (рядки) визначника, то він поміняє знак.

Приміром,

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}.$$

Доведення див. у *п. 2.4.4.*

Зауваження 2.2. Із властивостей визначника й того, що $\det E_n = 1$ (див. *Вправа 2.1*), випливає, що визначником матриці $A = \|\vec{a}_i\|_n$ можна було б назвати функцію стовпців

$$f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \stackrel{\text{den}}{=} |A|,$$

яка має властивості:
1) лінійності;
2) однорідності;
3) антисиметричності;
4) $|E_n| = 1$.

Властивості 1—4 є *основними властивостями визначника*, які розкривають його природу. Решта властивостей є логічними наслідками чотирьох основних.

Властивість 5 (*умови рівності нулеві визначника*). Визначник матриці дорівнює нулеві, якщо матриця містить:
1) нульовий стовпець (рядок);
2) два рівні стовпці (рядки);
3) пропорційні стовпці (рядки).

Доведення див. у *п. 2.4.5.*

Властивість 6 (***теорема анулювання***). Сума добутків елементів стовпця (рядка) на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулеві:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, j \neq k.$$

Доведення див. у *п. 2.4.6.*

Властивість 7. Визначник матриці не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати інший стовпець (рядок), помножений на деяке число λ.

Справді,

$$\left|\ldots \vec{a}_i + \lambda\vec{a}_j \ldots \vec{a}_j \ldots\right| = \left|\ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_j \ldots\right| + \lambda\left|\ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_j\right| =$$
$$= \det A + 0 = \det A.$$

Приміром,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Властивість 8. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць:

$$|AB| = |A||B|.$$

2.2. Лінійна залежність та незалежність стовпців (рядків) матриці

2.2.1. Основні означення

Перейдімо до встановлення зв'язку між визначником матриці і лінійною залежністю її стовпців (рядків).

Лінійну комбінацію елементів (рядків, стовпців) звуть *тривіальною*, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулеві, і *нетривіальною*, якщо існує хоча б один, відмінний від нуля коефіцієнт.

Означення 2.2. *Систему* з s стовпців $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ звуть *лінійно незалежною*, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цих стовпців дорівнює нульовому стовпцю.

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0.\end{gathered}}$$

Систему з s стовпців $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ звуть *лінійно залежною*, якщо існує рівна нульовому стовпцеві нетривіальна лінійна комбінація цих стовпців.

$$\boxed{\begin{gathered}\exists \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k} \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0}.\end{gathered}}$$

Вправа 2.2. Довести, що:

1) стовпці одиничної матриці E_n порядку n

$$\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Vmatrix}$$

лінійно незалежні;

2) будь-який стовпець $\vec{a}$ заввишки n є лінійною комбінацією стовпців $\vec{e}_i, i = \overline{1,n}$, матриці E_n. Коефіцієнтами лінійної комбінації є елементи стовпця $\vec{a}$.

Розв'язання вправи 2.2. див. у *п. 2.4.7.*

2.2.2. Умови лінійної залежності стовпців (рядків)

Теорема 2.1 (*критерій лінійної залежності стовпців (рядків)*)**.** Система з $s > 1$ стовпців (рядків) лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із стовпців (рядків) є лінійною комбінацією решти стовпців (рядків).

► $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай система стовпців $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ лінійно залежна. Тоді виконано рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0},$$

у якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулеві. Припустімо, що саме $\alpha_1 \neq 0$, тоді цю рівність можна переписати так:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}\vec{a}_s.$$

Отже, стовпець $\vec{a}_1$ лінійно виражається через решту стовпців.

$\boxed{\Leftarrow}$ Якщо один із стовпців (нехай для визначеності це $\vec{a}_1$) є лінійною комбінацією решти стовпців, тобто

$$\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_s\vec{a}_s,$$

то

$$\vec{a}_1 + (-\alpha_2)\vec{a}_2 + \dots + (-\alpha_s)\vec{a}_s = \vec{0},$$

де принаймні коефіцієнт при $\vec{a}_1$ відмінний від нуля. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ — лінійно залежна.◄

Наслідки.

1. Якщо система містить нульовий стовпець, то вона лінійно залежна.
2. Якщо деякі із стовпців $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ творять лінійно залежну підсистему, то вся система $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ — лінійно залежна.
3. Будь-які стовпці, що належать лінійно незалежній системі, самі по собі творять лінійно незалежну систему.
4. Якщо в квадратній матриці стовпці (рядки) лінійно залежні, то $\det A = 0$.

Доведення див. у *п. 2.4.8.*

2.3. Методи обчислення визначників

2.3.1. Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Полягає в перетворенні визначника до вигляду, коли всі елементи, розташовані по один бік від *головної діагоналі* (*Квадратна матриця*), дорівнюють нулеві. Перетворений визначник дорівнює добуткові елементів головної діагоналі (див. *Вправа 2.1*).

Означення 2.3. *Елементарними перетвореннями матриці* звуть:
1) переставляння стовпців (рядків);
2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;
3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число.

З елементарними перетвореннями зв'язані матриці певного вигляду — матриці елементарних перетворень (див. *п. 2.4.9*).

Із властивостей визначника випливає, що елементарне перетворення:
1) 1-го типу міняє знак визначника (антисиметричність)
2) 2-го типу помножує визначник на деяке число (однорідність);
3) 3-го типу не міняє визначника (властивість 7).

Правдиве навіть загальніше

Твердження 2.3. Визначник матриці не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати лінійну комбінацію решти стовпців (рядків).

Схема методу.

1. Якщо всі елементи 1-го стовпця визначника дорівнюють нулеві, то $\det A = 0$.

2. Нехай $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то переставленням рядків цього можна досягнути). Додамо перший рядок, помножений на коефіцієнт $\left(-\dfrac{a_{s1}}{a_{11}}\right), s = \overline{2, n},$ до решти рядків:

$$\det A \overset{\text{den}}{=} \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \left| \overleftarrow{b}_s = \overleftarrow{a}_s + \left(-\frac{a_{s1}}{a_{11}}\right)\overleftarrow{a}_1, s = \overline{2, n} \right| =$$

$$= \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} a_{11} & \dots \\ \hline 0 & \Delta_{n-1} \end{array}\right|,$$

де

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, i=\overline{2,n}, j=\overline{2,n}.$$

3. Для визначника Δ_{n-1} повторюємо п. 1—2.

Зауваження 2.3. Для обчислення визначника n-го порядку за цим методом доведеться виконати

$$\frac{n-1}{3}(n^2+n+3)$$

ділень та множень.

Приміром, обчислімо зведенням до трикутного вигляду визначник.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -6\\ 5 & -7 & -2 & 0\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \overleftarrow{b}_2=\overleftarrow{a}_2-4\overleftarrow{a}_1\\ \\ \overleftarrow{b}_4=\overleftarrow{a}_4-5\overleftarrow{a}_1\end{array}\begin{array}{l}\text{На першому кроці}\\ \text{від 2-го рядка відняли перший,}\\ \text{помножений на } 4, \text{та від 4-го рядка}\\ \text{відняли 1-й, помножений на } 5\end{array}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -6\\ 0 & -2 & -2 & 0\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \overleftarrow{c}_3=\overleftarrow{b}_3-2\overleftarrow{b}_2\\ \overleftarrow{c}_4=\overleftarrow{b}_4+2\overleftarrow{b}_2\end{array}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 4 & 2\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \overleftarrow{d}_4=\overleftarrow{c}_4+2\overleftarrow{c}_3\end{array}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 0 & -14\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot(-2)(-14)=28.$$

2.3.2. Метод опорного елементу (мінорів 2-го порядку)

Полягає у послідовному застосуванні формули, що виражає визначник n-го порядку через визначник $(n-1)$-го порядку, елементами якого є визначники 2-го порядку.

Якщо елемент заданого визначника, що стоїть у лівому верхньому кутку, відмінний від нуля, то ця формула має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Елемент a_{11} у цьому разі звуть *опорним*. За опорний елемент можна взяти будь-який відмінний від нуля елемент визначника.

Застосовуючи послідовно формулу, зведімо заданий визначник до визначника 2-го порядку. Отже, обчислення визначника порядку n зводиться до обчислення деякої кількості визначників 2-го порядку.

Приміром, обчислімо визначник методом опорного елементу.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -6 & -7 \\ -5 & -16 & -13 \\ 8 & 36 & 22 \end{vmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 8 & 36 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 8 & 22 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 50 & 30 \\ -132 & -54 \end{vmatrix} = -252.$$

2.3.3. Обчислення визначника за його властивостями

Проілюструємо метод прикладом.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+3 \\ 2 & -1 & 2+(-1) \\ -1 & 2 & -1+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Тут скористались властивостями 2 та 5.

Складніший приклад — обчислення Вандермондового визначника

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 & \dots & (a_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & (a_3)^{n-1} & \dots & (a_n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

див. у *п. 2.4.10.*

2.4. Додаткові відомості

2.4.1. Еквівалентне означення визначника

Перестановкою з n елементів звуть будь-яку впорядковану сукупність цих елементів.

Інверсією звуть таке розміщення двох чисел у перестановці, коли більше число стоїть ліворуч від меншого. Для того щоб визначити кількість інверсій у перестановці, треба підрахувати кількість інверсій, які творить кожне число з наступними числами, і результати додати. Приміром, у перестановці

$$2, 3, 5, 1, 4$$

кількість інверсій

$$\sigma(2, 3, 5, 1, 4) = 1 + 1 + 2 + 0 = 4.$$

Розгляньмо квадратну матрицю n-го порядку $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$.

Визначником квадратної матриці n-го порядку A звуть число, яке дорівнює сумі всіляких добутків його n елементів, узятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Знаки таких добутків визначають за правилом: якщо елементи в кожному добутку розміщено так, верхні індекси йдуть у зростаючому порядку, а нижні творять яку-небудь перестановку з n чисел, то при парній кількості інверсій у перестановці з нижніх індексів добуток беруть зі знаком плюс, а при непарній кількості інверсій — зі знаком мінус.

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} \overset{\text{den}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$$

2.4.2. Розв'язання вправи 2.1

1. Доведімо цю властивість за індукцією:

А. Для $n = 2$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22};$$

Б. Нехай $\det A_{n-1} = a_{11} a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}$.

В. Розкладаючи визначник $\det A_n$ за n-м рядком, одержимо

$$\det A_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} = a_{nn}(-1)^{2n}M_{nn} = a_{nn}\det A_{n-1} = a_{11}a_{22}...a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}.$$

За принципом математичної індукції твердження правдиве $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Оскільки одинична матриця є окремим випадком трикутної матриці, то за щойно доведеним твердженням маємо:

$$|E_n| = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1.$$

2.4.3. Доведення твердження 2.2

Нехай

$$A_{n\times n} = \|a_{ij}\|_{n\times n} = \|\vec{a}_i\|_n\ ;\ \ \vec{p} = \|p_i\|_n\ ;\ \ \vec{q} = \|q_i\|_n\ .$$

З означення дій над стовпцями випливає, що

$$a_{ki} = \alpha p_k + \beta q_k, k = \overline{1,n}.$$

Підставляючи ці рівності в розклад $\det A$ за i-м стовпцем, одержимо

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki} = \alpha\sum_{k=1}^{n} p_k A_{ki} + \beta\sum_{k=1}^{n} q_k A_{ki} = \alpha\det A_p + \beta\det A_q.$$

2.4.4. Доведення властивості 4 визначника

Доведімо за індукцією.

1. Для $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}.$$

2. Припустімо твердження правдиве для $n = k$, і розгляньмо визначник порядку $k+1$. Розкладімо його за будь-яким стовпцем, відмінним від переставлених. Переставлені стовпці входять у кожний доповняльний мінор, і за припущенням, змінять знак.

Отже, змінить знак і визначник матриці A.

2.4.5. Доведення властивості 5 визначника

1. Твердження випливає з розкладу за нульовим стовпцем (рядком).

2. Якщо в матриці A є два однакових стовпці, то, переставляючи їх, не змінимо матрицю, а знак у визначника зміниться, отже, $\det A = 0$.

3. Справді, із властивості однорідності випливає, що множник пропорційності можна винести за знак визначника. Тоді залишиться визначник із двома рівними рядками, який дорівнює нулеві. Приміром,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

2.4.6. Доведення властивості 6 визначника

Справді, замінімо j-й стовпець матриці (іншим) k-м стовпцем. Вираз

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$$

від цього не зміниться, оскільки значення A_{ik} на залежить від k-го стовпця. Визначник таким чином перетвореної матриці дорівнює нулеві. Розкладаючи його за новим k-м стовпцем, одержимо твердження теореми.

2.4.7. Розв'язання вправи 2.2

1) Маємо

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

2) Це випливає з рівності

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{Vmatrix} = a_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} + a_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} + \ldots + a_n \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

2.4.8. Доведення наслідків з теореми 2.1

Утворімо лінійну комбінацію стовпців, рівну нульовому стовпцю:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s + \alpha_{s+1}\vec{a}_{s+1} + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

1. Нехай $\vec{a}_1 = \vec{0}$, тоді, приміром, $\alpha_1 = 1, \alpha_i = 0, i = \overline{2,n}$ — отже, система стовпців $\vec{0}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — лінійно залежна;

2. Нехай $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ творять лінійно залежну підсистему, тобто існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \ldots + \beta_s\vec{a}_s = \vec{0}.$$

Тоді, приміром, можна покласти

$$\alpha_i = \beta_i, i = \overline{1,s}, \alpha_i = 0, i = \overline{s+1,n}.$$

Тобто

$$\beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \ldots + \beta_s\vec{a}_s + 0\vec{a}_{s+1} + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0}.$$

і серед коефіцієнтів $\beta_1, \ldots, \beta_s$ є відмінні від нуля. Отже, система $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — лінійно залежна.

3. Припущення, що існує лінійно залежна підсистема лінійно незалежної системи векторів, приводить до суперечності з попереднім пунктом.

4. Якщо матриця містить нульовий стовпець (рядок), то її визначник дорівнює нулеві. Отже, нехай у матриці немає нульового стовпця (рядка).

Твердження теореми можна сформулювати ще так:

> Якщо один із стовпців (рядків) матриці A лінійно виражається через решту, то $\det A = 0$.

Нехай стовпець $\vec{a}_j$ є лінійною комбінацією решти:

$$\vec{a}_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k \vec{a}_k$$

(деякі коефіцієнти α_k можуть дорівнювати нулеві). Застосовуючи *Твердження 2.1*, дістаємо

$$\det A = \sum_{k \neq j} \alpha_k \det A_k,$$

де A_k — матриця, яку одержимо з матриці A заміною j-го стовпця на k-й. У цій матриці стовпець $\vec{a}_k$ повторюється двічі, тому $\det A_k = 0$.

2.4.9. Матриці елементарних перетворень

Якщо φ — деяке елементарне перетворення матриці, то E^{φ} — відповідна йому елементарна матриця.

З елементарними перетвореннями матриці зв'язані квадратні матриці певного вигляду, які звуть *матрицями елементарних перетворень*:

1) переставленню i-го рядка з j-м відповідає матриця $E^{(i)\leftrightarrow(j)}$, одержана з одиничної матриці E_n переставленням i-го рядка з j-м;

2) множенню i-го рядка на число α, відмінне від нуля, відповідає матриця $E^{\alpha(i)}$, одержана з матриці E_n помноженням i-го рядка на число α;

3) додаванню до i-го рядка j-го рядка, помноженого на число α, відповідає матриця $E^{(i)+\alpha(j)}$, одержана з матриці E_n додаванням до i-го рядка j-го рядка, помноженого на число α.

Помноження матриці на матрицю $E^{(i)\leftrightarrow(j)}$ зліва міняє рядки з номерами i та j, приміром:

$$E^{(1)\leftrightarrow(2)} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c & d \\ a & b \end{Vmatrix}.$$

Помноження матриці на матрицю $E^{\alpha(i)}$ зліва помножує i-й рядок матриці на число α, приміром:

$$E^{\alpha(1)} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{Vmatrix};$$

$$E^{\alpha(2)} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{Vmatrix}.$$

Помноження матриці на матрицю $E^{(i)+\alpha(j)}$ зліва додає до i-го рядка j-й рядок, помножений на число α, приміром:

$$E^{(1)+\alpha(2)} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a+\alpha c & b+\alpha d \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи вплив елементарних перетворень матриці на визначник, дістаємо

$$|E^{\varphi}| = \begin{cases} -1, & E^{\varphi} = E^{(i)\leftrightarrow(j)}, \\ \alpha, & E^{\varphi} = E^{\alpha(i)}, \\ 1, & E^{\varphi} = E^{(i)+\alpha(j)}. \end{cases}$$

Покажемо, що матриці елементарних перетворень оборотні. Обернені до них матриці також є матрицями елементарних перетворень.

► $\forall \alpha \neq 0, \forall i, j$:

1) $E^{(i)\leftrightarrow(j)} E^{(i)\leftrightarrow(j)} = E_n \Rightarrow (E^{(i)\leftrightarrow(j)})^{-1} = E^{(i)\leftrightarrow(j)}$;

2) $E^{\alpha(i)} E^{\alpha^{-1}(i)} = E^{\alpha^{-1}(i)} E^{\alpha(i)} = E_n \Rightarrow \left(E^{\alpha(i)}\right)^{-1} = E^{\alpha^{-1}(i)}$;

3) $E^{(i)+\alpha(j)} E^{(i)-\alpha(j)} = E^{(i)-\alpha(j)} E^{(i)+\alpha(j)} = E_n \Rightarrow \left(E^{(i)+\alpha(j)}\right)^{-1} = E^{(i)-\alpha(j)}$.◄

2.4.10. Обчислення Вандермондового визначника

Скориставшись методом математичної індукції, доведімо, що для будь-якого n визначник W_n дорівнює добуткові всіляких різниць $a_i - a_j, 1 \le j \le i \le n$.

1. Справді для $n = 2$ маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

2. Нехай твердження доведене для Вандермондового визначника $(n-1)$-го порядку W_{n-1}.

3. Перетворімо визначник W_n таким чином: від n-го (останнього) рядка віднімаємо $(n-1)$-й, помножений на a_1, потім від $(n-1)$-го рядка віднімаємо $(n-2)$-й, також помножений на a_1, і так далі, нарешті, від 2-го рядка віднімаємо 1-й, помножений на a_1. Дістанемо:

$$W_n \left\vdots\, \overleftarrow{w}^k - a_1 \overleftarrow{w}^{k-1}, k = \overline{2,n}; \right\vdots =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2)^2 - a_1 a_2 & (a_3)^2 - a_1 a_3 & \dots & (a_n)^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (a_2)^{n-1} - a_1 (a_2)^{n-2} & (a_3)^{n-1} - a_1 (a_3)^{n-2} & \dots & (a_n)^{n-1} - a_1 (a_n)^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи цей визначник за 1-м стовпцем, прийдемо до визначника $(n-1)$-го порядку, який після винесення з усіх стовпців спільних множників, набуде вигляду:

$$W_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_2)^{n-2} & (a_3)^{n-2} & \dots & (a_n)^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Останній множник — це Вандермондів визначник $(n-1)$-го порядку, який, за припущенням, рівний добуткові всіляких різниць $a_i - a_j$ для $2 \le j < i \le n$. Можна написати, що

$$W_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$