Модуль 3. Ранг матриці. Обернена матриця

Структура модуля

Вступ

1. Ключові слова
2. Короткий зміст

Теоретична частина

Розділ 3.1. Ранг матриці

3.1.1. Основні означення

3.1.2. Критерій рівності нулеві визначника

Розділ 3.2. Обчислення рангу матриці

3.2.1. Східчасті матриці

3.2.2. Зведення матриці до східчастого вигляду (метод Ґауса)

3.2.3. Знаходження рангу матриці методом Ґауса

Розділ 3.3. Методи знаходження оберненої матриці

3.3.1. Умови оборотності матриці

3.3.2. Перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду

3.3.3. Метод приєднаної матриці

3.3.4. Метод Ґауса — Йордана

Розділ 3.4. Додаткові відомості

3.4.1. Доведення наслідку 1 з теореми 3.1

3.4.2. Доведення твердження 3.3

3.4.3. Розв’язання вправи 3.1

3.4.4. Доведення твердження 3.4

3.4.5. Розв’язання вправи 3.2

3.4.6. Розв’язання вправи 3.3

Вступ

1. Ключові слова

Мінор k-го порядку. Ранг матриці. Базисний мінор.

Еквівалентні матриці. Лідер рядка. Східчаста матриця. Зведена східчаста матриця. Метод Ґауса.

Невироджена матриця. Приєднана матриця. Метод Ґауса — Йордана.

2. Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 3.1—3.3) та розширеному (розділи 3.1—3.4).

У модулі:

— розглянуто ранг — важливу числову характеристику матриці;

— встановлено критерій рівності нулеві визначника й умови оборотності матриці;

— подано практичні методи знаходження рангу матриці й алгоритми знаходження оберненої матриці;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

3.1. Ранг матриці

3.1.1. Основні означення. Виберімо в матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_{mn}$ k рядків та k стовпців ($1 \le k \le \min(m,n)$).

Означення 3.1. *Визначник матриці*, утвореної з елементів, які розташовані на перетині вибраних k рядків та k стовпців, звуть *мінором k-го порядку* матриці A і позначають M_k.

Приміром, одним з мінорів 2-го порядку для матриці

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

буде $M_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Якщо $s = \min(m,n)$, то матриця A матиме мінори порядків $1, 2, \ldots, s$. Серед них є нульові і ненульові (якщо матриця A ненульова).

Означення 3.2. *Рангом* ненульової матриці A звуть найбільший порядок її ненульових мінорів і позначають $\operatorname{rang} A$.

Ранг нульової матриці вважають рівним нулеві.

Якщо $\operatorname{rang} A = r > 0$, то це означає, що в матриці A є, принаймні один, ненульовий мінор порядку r, але будь-який мінор порядку, більшого ніж r, дорівнює нулеві. Ненульові мінори порядку r матриці звуть *базисними*, а рядки і стовпці, що творять такі мінори, звуть *базисними рядками* (*стовпцями*).

Теорема 3.1 (*про базисний мінор*). Базисні стовпці (рядки) матриці A лінійно незалежні. Кожний стовпець (рядок) матриці A є *лінійною комбінацією* її базисних стовпців (рядків).

►Нехай, для визначеності, базисний мінор матриці A має порядок r і розташований у її лівому верхньому кутку:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Доведення проведімо лише для стовпців.

1. Доведімо, що стовпці $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ лінійно незалежні методом від супротивного. Нехай стовпці $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ лінійно залежні. Тоді один із стовпців є лінійною комбінацією решти стовпців. Нехай, приміром,

$$\vec{a}_r = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_{r-1} \vec{a}_{r-1}.$$

Це означає, що в базисному мінорі $M_r = \left| \vec{a}_i \right|_r$ стовпець є лінійною комбінацією решти. З *Наслідку 4 з Теореми 2.1* випливає рівність $M_r = 0$, що суперечить означенню базисного мінора.

Отже, наше припущення про лінійну залежність стовпців неправдиве. Тобто, стовпці — лінійно незалежні.

2. Твердження теореми очевидно для стовпців з номерами $1 \le j \le r$. Доведімо, що кожний стовпець матриці з номером $r + 1 \le j \le n$ є лінійною комбінацією базисних стовпців:

$$\vec{a}_j = \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_r \vec{a}_r \Leftrightarrow$$

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{i1} + \dots + \alpha_r a_{ir}, i = \overline{1, m}.$$

Покажемо, що для будь-яких i та j $(1 \le i \le m, r + 1 \le j \le n)$ виконано рівність

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{array} \right| = 0.$$

Справді, при $i \le r$ у визначнику Δ два однакових рядки, а в решті випадків (при $i > r$ та $j > r$) Δ є мінором матриці порядку $(r + 1)$, а отже, дорівнює нулеві.

Зафіксуймо j $(r + 1 \le j \le n)$ і *розкладімо визначник* (*визначник*) Δ за останнім рядком. Маємо

$$0 = (-1)^{i+1} \left(a_{i1} M_{i1} - a_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{r-1} a_{ir} M_{ir} + (-1)^r a_{ij} M_r \right).$$

Одержану рівність виконано для будь-якого i $(1 \le i \le m)$; при цьому числа $M_1^i, \dots, M_r^i$ від i не залежать. Оскільки M_r — базисний мінор, то $M_r \ne 0$, і рівність можна переписати так:

$$a_{ij} = (-1)^{r+1} a_{i1} \frac{M_{i1}}{M_r} + (-1)^{r+2} a_{i2} \frac{M_{i2}}{M_r} + \dots + a_{ir} \frac{M_{ir}}{M_r} \Leftrightarrow$$

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \dots + \alpha_r a_{ir}.$$

Завдяки довільності вибору j $(r + 1 \le j \le n)$ маємо, що кожний стовпець матриці є лінійною комбінацією базисних стовпців.◄

Наслідки.

1. Ранг матриці A дорівнює найбільшій кількості лінійно незалежних стовпців (рядків).
2. Найбільша кількість лінійно незалежних рядків у матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно незалежних стовпців.

Доведення наслідку 1 див. у *п. 3.4.1.*

Зауваження 3.1. Наслідки з теореми 3.1 з неї дають підставу означити *ранг* як найбільшу кількість лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці.

3.1.2. Критерій рівності нулеві визначника. Для квадратної матриці A порядку n можна сформулювати умову лінійної залежності її стовпців (рядків), використовуючи її визначник.

Твердження 3.1 (*критерій рівності нулеві визначника*)**.** Визначник *квадратної матриці* A n-го порядку дорівнює нулеві тоді й лише тоді, коли її стовпці (рядки) лінійно залежні.

► $\boxed{\Rightarrow}$ Для нульової матриці твердження теореми очевидно.

Умова $\det A = 0$ означає, що

$$\operatorname{rang} A \leq n - 1.$$

Принаймні один із стовпців та один з рядків не перетинає базисний мінор. Стовпець та рядок, що не перетинає базисний мінор, лінійно виражаються відповідно через стовпці та рядки, у яких розташовано базисний мінор.

$\boxed{\Leftarrow}$ Достатність випливає з *наслідку 4 теореми 2.1.* ◄

Наслідки.

1. Визначник квадратної матриці A n-го порядку дорівнює нулеві тоді й лише тоді, коли її ранг менше за n, тобто

$$\boxed{\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n.}$$

2. Визначник квадратної матриці A n-го порядку відмінний від нуля тоді й лише тоді, коли її стовпці (рядки) лінійно незалежні, тобто

$$\boxed{\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n.}$$

3. Стовпці $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ заввишки n лінійно залежні (лінійно незалежні) тоді й лише тоді, коли визначник матриці, утвореної стовпцями $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, рівний нулеві (відмінний від нуля).

3.2. Обчислення рангу матриці

3.2.1. Східчасті матриці. Перший за номером ненульовий елемент рядка звуть *лідером рядка*.

Означення 3.3. Матрицю звуть *східчастою* (рис. 3.1), якщо вона справджує умови:
1) нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче ненульових;
2) номери лідерів зростають.

Верхня трикутна матриця є окремим випадком східчастої матриці.

$$\left\|\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & \dots & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & a_{rk_r} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|$$

Рис. 3.1

Приміром, матриця A — східчаста, а B — ні (підкреслені лідери рядків):

$$A = \left\|\begin{matrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|; \; B = \left\|\begin{matrix} \underline{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & \underline{-1} & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Твердження 3.2. *Транспонування матриці*, *елементарні перетворення матриці* та видалення нульових стовпців (рядків) з матриці не міняють її рангу.

Твердження 3.3. Кількість ненульових рядків східчастої матриці дорівнює її рангу.

Доведення твердження 3.3 див. у *п. 3.4.2.*

3.2.2. Зведення матриці до східчастого вигляду (метод Ґауса).

Означення 3.4. Матриці A та B звуть *еквівалентними*, якщо одна з них одержана з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$.

Зауваження 3.2. Еквівалентні матриці не є, взагалі кажучи, рівними, але їхні ранги рівні.

Схема зведення матриці до східчастого вигляду (методу Ґауса)

Припускаємо, що матриця A

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k_1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk_1} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

ненульова і ще незведена до східчастого вигляду.

Крок методу. Вибираємо рядок з найменшим номером лідера — k_1. Нехай це рядок з номером l $(1 \le l \le m)$. Переставмо цей рядок з першим. Матриця A перетвориться на матрицю

$$A\left|\begin{array}{c}\overleftarrow{b}_1=\overleftarrow{a}_l\\ \ldots\\ \overleftarrow{b}_l=\overleftarrow{a}_1\\ \overleftarrow{b}_i=\overleftarrow{a}_i, i\notin\{1,l\}\end{array}\right| \sim B=\begin{Vmatrix}0&\ldots&0&b_{1k_1}&\ldots&b_{1n}\\0&\ldots&0&b_{2k_1}&\ldots&b_{2n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&0&b_{mk_1}&\ldots&b_{mn}\end{Vmatrix}.$$

Метою подальшого буде: одержати під лідером нового 1-го рядка нулі. Для цього до i-го рядка додаємо новий 1-й рядок, помножений на $\left(-\dfrac{b_{ik_1}}{b_{1k_1}}\right), i=\overline{2,m}$:

$$B\left|\begin{array}{c}\overleftarrow{c}_i=\overleftarrow{b}_i-\dfrac{b_{ik_1}}{b_{1k_1}}\overleftarrow{b}_1,\\ i=\overline{2,m}\end{array}\right|\sim C=\begin{Vmatrix}0&\ldots&0&b_{1k_1}&\ldots&\ldots&b_{1n}\\0&\ldots&0&0&c_{2,k_1+1}&\ldots&c_{2n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&0&0&c_{m,k_1+1}&\ldots&c_{mn}\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}&b_{1k_1}&\ldots\\ 0&\vec{0}&D\end{Vmatrix}.$$

Кінець кроку.

Можливі два випадки:

1. Матриця D — східчаста, тоді перетворення завершились — матрицю A зведено до східчастого вигляду.

2. Матриця D розміром $(m-1)\times(n-k_1)$ не східчаста, тоді для неї повторюємо крок методу.

Сумарна кількість кроків не перевищує $\min(m,n)$. Тому обов'язково настане момент, коли перетворення завершаться, й одержимо матрицю східчастого вигляду

$$Z=\begin{Vmatrix}0&\ldots&0&z_{1k_1}&\ldots&\ldots&&&&&&\\0&\ldots&0&0&\ldots&0&z_{2k_2}&\ldots&&&&\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ddots&&\\0&\ldots&0&0&\ldots&0&0&\ldots&0&z_{rk_r}&\ldots&\ldots\\0&\ldots&0&0&\ldots&0&0&\ldots&0&0&&0\\0&\ldots&0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&0&0&\ldots&0&0&\ldots&0&0&\ldots&0\end{Vmatrix}$$

де $k_1<k_2<\ldots<k_r$ та $z_{ik_i}\neq 0, i=\overline{1,r}$.

Отже, бачимо, що елементарними перетвореннями 1-го та 3-го типу матрицю A можна звести до еквівалентної їй східчастої матриці Z.

Процедуру зведення матриці A до східчастого вигляду звуть *методом Гауса* і позначають

$$A \xrightarrow{G} Z.$$

3.2.3. Знаходження рангу матриці методом Ґауса. 1. Матрицю зводять до східчастого вигляду Z за допомогою елементарних перетворень — методу Ґауса.

2. Ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків східчастої матриці Z.

Вправа 3.1. Знайти ранг матриці методом Ґауса

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання вправи 3.1 див. у *п. 3.4.3.*

3.3. Методи знаходження оберненої матриці

3.3.1. Умови оборотності матриці. Повернімось тепер до з'ясування оборотності квадратної матриці A порядку n, тобто існування такої матриці A^{-1}, що

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

Означення 3.5. Квадратну матрицю звуть *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля.

Із *твердження 3.1* та наслідків з нього випливає, що невиродженість матриці еквівалентна лінійній незалежності стовпців (рядків) матриці та рівності рангу квадратної матриці її порядку.

Теорема 3.2 (*критерій оборотності матриці*)**.** Матриця оборотна тоді й лише тоді, коли вона невироджена.

► $\boxed{\Rightarrow}$ Доведімо, що якщо матриця оборотна, то вона невироджена.

З означення оборотної матриці та *властивості 8* визначника (*п. 2.1.4*) випливає

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \Rightarrow |A|\left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0,$$

тобто матриця A невироджена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Покажімо тепер, що якщо матриця невироджена, то вона оборотна.

Доведімо, що

$$AA^{*} = |A|E_n = \left\|b_{ij}\right\|_{nn},$$

де

$$A^{*} = \left(\left\|A_{ij}\right\|_{n\times n}\right)^{T} = \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix},$$

де $A_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n},$ — алгебричні доповнення елементів матриці A (див. *Твердження 2.1*).

Справді,

$$b_{ij} = \overleftarrow{a}_i \cdot \vec{a}_{*j} = \|a_{i1}a_{i2}...a_{in}\| \cdot \begin{Vmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ ... \\ A_{jn} \end{Vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ |A|, & i = j \end{cases}.$$

Тут скористались *властивістю 6* визначника (*п. 2.1.4*) та *твердженням 2.1*. Отже, $AA^* = |A|E_n$. Так само доводиться, що $A^*A = |A|E_n$. Тобто,

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*. \blacktriangleleft$$

Означення 3.6. Матрицю $A^* = \left(\|A_{ij}\|_{n\times n}\right)^T$ звуть *приєднаною до матриці* $A_{n\times n}$.

3.3.2. Перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду.

Означення 3.7. Східчасту матрицю звуть *зведеною*, якщо стовпці, у яких стоять лідери, творять *одиничну матрицю*.

Зведена східчаста матриця не має нульових рядків і всі її лідери дорівнюють одиниці.

Нехай $A_{m\times n}$ ненульова матриця.

1. Зведімо її до східчастого вигляду методом Ґауса $Z = \|\overleftarrow{z}_i\|_n$ — матриці, яка має r перших ненульових рядків (*прямий хід методу Ґауса*).

2. Відкидаючи нульові рядки (це вже не буде елементарним перетворенням), одержимо матрицю

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & ... & 0 & b_{1k_1} & ... & ... & & & & & b_{1k_r} & \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_{2k_2} & ... & & & & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \ddots & ... & \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & & b_{rk_r} & ... \end{Vmatrix}$$

3. *Зворотний хід методу Ґауса*. Його мета — одержати на місці лідерів одиниці, а над ними — нулі.

Крок методу. Ділимо останній рядок на його лідер — b_{rk_r} — і додаємо до решти новий останній рядок, помножений на $(-b_{ik_r}), i = \overline{1, r-1}$:

$$B \left| \begin{aligned} \overleftarrow{c}_i &= \overleftarrow{b}_i - \frac{b_{ik_r}}{b_{rk_r}} \\ \overleftarrow{c}_r &= \frac{\overleftarrow{b}^r}{b_{rk_r}} \end{aligned} \right| \sim C = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} ... & ... & c_{1,k_r-1} & 0 & c_{1,k_r+1} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & c_{r-1,k_r-1} & 0 & ... & ... \\ \hline 0 & ... & 0 & 1 & c_{r,k_r-1} & ... \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|cc} D & \vec{0} & ... \\ \hline \overleftarrow{0} & 1 & ... \end{array} \right\|.$$

Кінець кроку.

Якщо матриця D має лише один рядок — ділимо його на лідер і зупиняємось — одержали зведену східчасту матрицю Z_E.

Якщо матриця D містить більше, ніж один рядок, повторюємо для неї крок методу.

Після r кроків одержимо зведену східчасту матрицю

$$Z_E = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & \dots & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Процедуру перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду, що поєднує в собі прямий хід методу Ґауса, можливе відкидання нульових рядків та зворотний хід методу Ґауса звуть *методом Ґауса — Йордана* і позначають

$$A \overset{G-J}{\to} Z_E.$$

Твердження 3.4. Будь-яку квадратну матрицю n-го порядку з лінійно незалежними рядками елементарними перетвореннями її рядків можна звести до одиничної матриці E_n.

Доведення твердження 3.4 див. у *п. 3.4.4.*

3.3.3. Метод приєднаної матриці. 1. Обчислюють визначник матриці A.

2. Якщо $\det A = 0$, то оберненої до A матриці не існує.

3. Якщо $\det A \neq 0$, то будують приєднану до A матрицю

$$A^* = \| A_{ij} \|^T .$$

4. Обернену до A матрицю знаходять за формулою

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.}$$

Правильність обчислень перевіряють умовою

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.$$

Зауваження 3.3. Оскільки цей метод передбачає обчислення великої кількості визначників, то його застосовують частіше для теоретичних міркувань й обернення матриць 2-го та 3-го порядків. Як наслідок, для матриці 2-го порядку:

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix}.$$

Вправа 3.2. Знайти методом приєднаної матриці обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{Vmatrix}$$

і перевірити результат.

Розв'язання вправи 3.2 див. у *п. 3.4.5.*

3.3.4. Метод Ґауса — Йордана. Нехай A — квадратна матриця порядку n. Утворюють розширену матрицю

$$\| A \mid E_n \|$$

розміру $n \times (2n)$.

1. Застосовують до матриці $\|A \mid E_n\|$ прямий хід методу Ґауса (матрицю A зводять до східчастого вигляду, водночас перетворюючи і праву частину розширеної матриці).

2. Якщо матриця Z — східчаста форма матриці A — міститиме нульові рядки, то робимо висновок про необоротність матриці A.

3. Якщо матриця Z не має нульових рядків, то матриця A — оборотна, і матрицю Z, вже зворотним ходом методу Ґауса можна звести до одиничної матриці E_n. Тим самим розширену матрицю буде перетворено до зведеного східчастого вигляду:

$$\|A \mid E_n\| \xrightarrow{G-J} \|E_n \mid A^{-1}\|.$$

Зауваження 3.4. Знаходити обернену до матриці A можна і перетворенням матриці $\left\|\frac{A}{E}\right\|$. При цьому всі перетворення провадять лише із стовпцям.

Вправа 3.3. Знайти методом Ґауса — Йордана матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання вправи 3.3 див. у *п. 3.4.6.*

3.4. Додаткові відомості

3.4.1. Доведення наслідку 1 з теореми 3.1. Якщо $\operatorname{rang} A = 0$, то всі стовпці нульові, і нема жодного лінійно незалежного стовпця.

Нехай $\operatorname{rang} A = r > 0$. Покажімо, що в матриці A існує r лінійно незалежних стовпців. Розгляньмо складену з елементів матриці A матрицю A' порядку r, визначником якої є базисний мінор. Стовпці матриці A' є частинами стовпців матриці A.

Стовпці матриці A, у яких розташовано базисний мінор, лінійно незалежні. Справді, якщо вони лінійно залежні, то були б лінійно залежні стовпці матриці A', і базисний мінор дорівнював би нулеві.

Доведімо, що будь-які p стовпців матриці A лінійно залежні, якщо $p > r$. Складімо матрицю B з цих p стовпців. Оскільки кожний мінор матриці B є мінором матриці A, а, отже, в матриці B не має відмінного від нуля мінора порядку, більшого ніж r, то

$$\operatorname{rang} B \le r < p$$

і хоча б один із стовпців матриці B не входить у базисний мінор.

Цей стовпець лінійно виражається через решту (див. *Теорема 3.1*).

Отже, в матриці A існує r лінійно незалежних стовпців і будь-які p стовпців $(p > r)$ лінійно залежні.

Так само це твердження доводиться і для рядків.

3.4.2. Доведення твердження 3.3. Справді, мінор порядку r східчастої матриці, елементи якого розташовано в перших r рядках і стовпцях з номерами $k_1, k_2, ..., k_r$, відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{1k_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{rk_r} \end{vmatrix} = a_{1k_1} ... a_{rk_r} \neq 0,$$

а будь-який мінор порядку $s > r$ містить нульовий рядок, а, отже, дорівнює нулеві.

3.4.3. Розв'язання вправи 3.1. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_2 - \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_1 \end{vmatrix} \sim$

$$\sim B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \\ \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 - \frac{1}{2}\overleftarrow{b}_2 \end{vmatrix} \sim C = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матриця C має східчастий вигляд і два ненульових рядки, отже, $\operatorname{rang} A = 2$.

3.4.4. Доведення твердження 3.4. Матрицю A елементарними перетвореннями прямого ходу методу Ґауса можна звести до східчастого вигляду $Z = \|\overleftarrow{z}_i\|_n$. Матриця Z не містить нульових рядків (інакше б у неї було менше, ніж n лінійно незалежних рядків), має трикутний вигляд, з відмінними від нуля діагональними елементами

$$Z = \begin{Vmatrix} z_{11} & ... & ... & ... \\ 0 & z_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & z_{nn} \end{Vmatrix}, z_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}.$$

Матрицю Z елементарними перетвореннями зворотного ходу методу Ґауса можна перетворити на одиничну матрицю E_n.

3.4.5. Розв'язання вправи 3.2. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ матриця A *оборотна* (*обернена матриця*).

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\left\|\begin{matrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|^{T} = \left\|\begin{matrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

Перевірка:

$$A^{-1}A = \left\|\begin{matrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

3.4.6. Розв'язання вправи 3.3.

$$\|A \mid E_3\| = B = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \left|\begin{array}{l} \\ \overleftarrow{c}_2 = \overleftarrow{b}_2 - 2\overleftarrow{b}_1 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 - \frac{5}{2}\overleftarrow{b}_1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right\| \left|\begin{array}{l} \\ \\ \overleftarrow{d}_3 = \overleftarrow{c}_3 - \frac{1}{2}\overleftarrow{c}_2 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right\| \left|\begin{array}{l} \overleftarrow{e}_1 = \overleftarrow{d}_1 - 2\overleftarrow{d}_3 \\ \\ \overleftarrow{e}_3 = 2\overleftarrow{d}_3 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right\| \left|\begin{array}{l} \overleftarrow{f}_1 = \overleftarrow{e}_1 + 3\overleftarrow{e}_2 \\ \\ \\ \end{array}\right| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right\| \left|\begin{array}{l} \overleftarrow{g}_1 = \dfrac{1}{2}\overleftarrow{f}_1 \\ \\ \\ \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right\| \Rightarrow A^{-1} = \left\|\begin{matrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|.$$