Модуль 4. Системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

Структура модуля

Вступ

1. Ключові слова

Лінійне алгебричне рівняння. Система m *лінійних алгебричних рівнянь* (СЛАР) *з* n *невідомими. Однорідна СЛАР. Неоднорідна СЛАР. Матриця системи. Розширена матриця системи. Матричний вигляд СЛАР. Векторний вигляд СЛАР. Розв'язок системи. Сумісна система. Несумісна система. Визначена система. Невизначена система. Рівносильні системи. Елементарні перетворення СЛАР. Еквівалентні системи.*

Базисні змінні. Вільні змінні. Фундаментальна система розв'язків (ФСР) однорідної СЛАР. Нормальна ФСР однорідної СЛАР.

Формули Крамера.

2. Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 4.1—4.3) і розширеному (розділи 4.1—4.4).

У модулі:

— розглянуто і вивчено системи лінійних алгебричних рівнянь, потреба розв'язання яких часто виникає в інженерних задачах;

— встановлено критерій сумісності системи;

— подано точні методи розв'язання систем алгебричних та матричних рівнянь;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

4.1. Основні поняття

Рівняння щодо невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b,$$

звуть *лінійним алгебричним*. Задані числа $a_i, i = \overline{1,n}$, звуть *коефіцієнтами* рівняння; а число b — *вільним членом* рівняння.

Означення 4.1. *Система* m *лінійних алгебричних рівнянь* (СЛАР) з n невідомими $x_1, \ldots, x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

СЛАР звуть *однорідною*, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Перший індекс коефіцієнта при змінній вказує на номер рівняння, а другий — на номер невідомої, при якій стоїть цей коефіцієнт.

Зауваження 4.1. Кількість рівнянь m може й не дорівнювати кількості змінних n.

Зіставмо системі (4.1) дві матриці: *матрицю системи*

$$A = \|a_{ij}\|_{mn} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \|\vec{a}_j\|_n$$

і *розширену матрицю системи*

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\| = \left\| \vec{a}_j \mid \vec{b} \right\|_n,$$

де $\vec{b} = \|b_i\|_m$. Позначмо *стовпець невідомих*

$$\vec{x} = \|x_j\|_n = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}.$$

Тоді систему (4.1) можна записати у:

1) *матричному вигляді*:

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b},}$$

де A — матриця системи; $\vec{x}$ — стовпець невідомих; $\vec{b}$ — стовпець вільних членів системи;

2) *векторному вигляді*:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j = \vec{b}} \Leftrightarrow x_1 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_1 \\ | \end{matrix} \right\| + x_2 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_2 \\ | \end{matrix} \right\| + \ldots + x_n \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_n \\ | \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{matrix} \right\|.$$

Означення 4.2. *Розв'язком системи* (4.1) звуть набір чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, який, якщо його підставити в систему замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перетворює всі рівняння на тотожності. Розв'язок записують як стовпець

$$\vec{c} = \left\| \begin{matrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{matrix} \right\| = \left\| c_j \right\|_n .$$

Система може мати:

1) один розв'язок, приміром,

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; \end{cases}$$

2) безліч розв'язків, приміром,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$$

3) не мати жодного, приміром,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Означення 4.3. СЛАР звуть *сумісною* ($\Leftrightarrow$*розв'язною*), якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* ($\Leftrightarrow$*нерозв'язною*), якщо вона не має розв'язків. Сумісну систему звуть *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Означення 4.4. Будь-який розв'язок системи звуть її *частинним розв'язком*. Множину всіх частинних розв'язків звуть *загальним розв'язком* системи.

Дві системи звуть *рівносильними*, якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки. Усі несумісні системи вважають рівносильними.

Елементарними перетвореннями СЛАР звуть:

1) переставляння рівнянь;

2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;

3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.

Елементарні перетворення СЛАР призводять до відповідних елементарних перетворень матриці та розширеної матриці системи (див. *п. 2.3.1*).

СЛАР, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, звуть *еквівалентними.*

Твердження 4.1. Еквівалентні СЛАР рівносильні.

4.2. Розв'язування СЛАР

4.2.1. Критерій сумісності СЛАР. Розв'язати систему — це означає:

1) з'ясувати, чи є система сумісною або несумісною;

2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

Теорема 4.1 (*Кронекера — Капеллі*). СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

сумісна тоді й лише тоді, коли *ранг матриці* системи дорівнює рангові розширеної матриці системи

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}.$$

► Позначмо $\vec{a}_j = \|a_{ij}\|_m$, $j = \overline{1, n}$, і запишімо систему у векторній формі:

$$x_1 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_1 \\ | \end{matrix} \right\| + x_2 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_2 \\ | \end{matrix} \right\| + \ldots + x_n \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_n \\ | \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{matrix} \right\|. \tag{4.2}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Якщо існує розв'язок системи, то запис (4.2) означає, що стовпець вільних членів є *лінійною комбінацією стовпців* матриці системи. Отже, приписування стовпця вільних членів не збільшує загальної кількості *лінійно незалежних стовпців*, і $\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A = r$. Тоді *базисний мінор матриці* (*ранг матриці*) A буде базисним і в матриці $\tilde{A}$. Переставленням рівнянь та перенумеровуванням змінних завжди можна досягнути, щоб базисний мінор розташувався у верхньому лівому кутку матриці.

За теоремою про базисний мінор (див. *Теорема 3.1*) стовпець вільних членів можна зобразити як лінійну комбінацію базисних стовпців:

$$c_1 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_1 \\ | \end{matrix} \right\| + c_2 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_2 \\ | \end{matrix} \right\| + \ldots + c_r \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{a}_r \\ | \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1r}c_r = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mr}c_r = b_m. \end{cases}$$

Упорядкований набір n чисел $c_1, .., c_r, 0, \ldots, 0$ перетворює кожне з рівнянь системи (4.1) на тотожність. Отже, система (4.1) сумісна. ◄

4.2.2. Розв'язування СЛАР методом Ґауса — Йордана. Розгляньмо СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b} \qquad (4.1)$$

і розширену матрицю системи

$$\tilde{A} = \left\| A \mid \vec{b} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\|.$$

1. Застосувавши до розширеної матриці $\left\| A \mid \vec{b} \right\|$ прямий хід методу Ґауса, зведімо її до *східчастого вигляду* (*східчаста матриця*) (елементарним перетворенням розширеної матриці відповідатимуть елементарні перетворення рівнянь системи (4.1)):

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc|c} \alpha_{1k_1} & \ldots & \ldots & & & & & & & & \beta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2k_2} & \ldots & & & & & & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & \alpha_{rk_r} & \ldots & \ldots & \beta_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & & 0 & \beta_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & \beta_m \end{array} \right\|$$

2. Якщо ж тепер хоча б один з вільних членів $\beta_i, i = \overline{r+1, m}$, відмінний від нуля, то система несумісна, оскільки

$$\operatorname{rang} A = r < \operatorname{rang} \tilde{A} = r + 1.$$

Якщо ж $\beta_i = 0, i = \overline{r+1, m}$, то система сумісна.

3. Якщо система сумісна, то, застосувавши до східчастої матриці зворотний хід методу Ґауса, одержимо *зведену східчасту матрицю* (*східчаста матриця*)

$$\left\|\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & \dots & \dots & 0 & & & & 0 & & & \delta_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & & & 0 & & & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots & \dots & \delta_r \end{array}\right\|. \tag{4.3}$$

Для спрощення подальшого запису тимчасово перенумеруймо змінні так, щоб лідери рядків стояли в перших r стовпцях:

$$y_1 = x_{k_1}, y_2 = x_{k_2}, \dots, y_r = x_{k_r}, \dots.$$

Тоді матриця (4.3) набуде вигляду

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{1r+1} & \dots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \gamma_{2r+1} & \dots & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \gamma_{rr+1} & \dots & \gamma_{rn} & \delta_r \end{array}\right\|$$

і їй відповідатиме система

$$\begin{cases} y_1 + \gamma_{1r+1}y_{r+1} + \dots + \gamma_{1n}y_n = \delta_1, \\ y_2 + \gamma_{2r+1}y_{r+1} + \dots + \gamma_{2n}y_n = \delta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r + \gamma_{rr+1}y_{r+1} + \dots + \gamma_{rn}y_n = \delta_r. \end{cases} \tag{4.4}$$

Змінні, які відповідають лідерам рядків — $y_1, \dots, y_r$ — звуть *базисними*, а решту змінних $y_{r+1}, \dots, y_n$ — *вільними*. Як бачимо кожне рівняння містить лише одну базисну змінну.

Тут можливі 2 випадки:

1. Кількість змінних n дорівнює кількості рівнянь r у системі (4.4), $(n = r)$, тобто вона має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = \delta_1, \\ y_2 = \delta_2, \\ \dots\dots\dots \\ y_r = \delta_r. \end{cases}$$

Тоді єдиним розв'язком системи буде стовпець $\vec{y}$ з відповідним чином переставленими елементами.

2. Кількість змінних n більше кількості рівнянь r $(n > r)$. Надаймо вільним змінним $y_{r+1}, \dots, y_n$ довільних значень $C_1, \dots, C_{(n-r)}$ і виразімо базисні змінні $y_1, \dots, y_r$:

$$\begin{cases} y_{r+1} = C_i, i = \overline{1, n-r}, \\ y_1 = \delta_1 - \gamma_{1r+1}C_1 - \ldots - \gamma_{1n}C_{n-r}, \\ y_2 = \delta_2 - \gamma_{2r+1}C_1 - \ldots - \gamma_{2n}C_{n-r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r = \delta_r - \gamma_{rr+1}C_1 - \ldots - \gamma_{rn}C_{n-r}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Запишімо загальний розв'язок (4.5) системи (4.1) у векторному вигляді:

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} \delta_1 - \sum\limits_{i=1}^{n-r} \gamma_{1r+i}C_i \\ \ldots \\ \delta_r - \sum\limits_{i=1}^{n-r} \gamma_{rr+i}C_i \\ C_1 \\ \ldots \\ C_{n-r} \end{Vmatrix} = \vec{d} + C_1\vec{g}_1 + \ldots + C_{n-r}\vec{g}_{n-r}, \tag{4.6}$$

де

$$\begin{Vmatrix} \delta_1 \\ \ldots \\ \delta_r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} \vec{d}; \begin{Vmatrix} \gamma_{1r+1} \\ \ldots \\ \gamma_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} \vec{g}_1; \ldots; \begin{Vmatrix} \gamma_{1n} \\ \ldots \\ \gamma_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} \vec{g}_{n-r}. \tag{4.7}$$

Вправа 4.1.

Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання вправи 4.1 див. у *п. 4.4.1.*

4.2.3. Дослідження однорідних СЛАР. Розгляньмо ненульову (тобто не всі коефіцієнти рівнянь дорівнюють нулеві) однорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}. \tag{4.8}$$

Однорідна СЛАР (4.8) завжди сумісна, бо в неї існує тривіальний розв'язок $\vec{x} = \vec{0}$.

Правдиве

Твердження 4.2. 1. Сума розв'язків однорідної СЛАР (4.8) також є її розв'язком.
2. Добуток розв'язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв'язком системи.

Доведення твердження 4.2. див у *п. 4.4.2.*

Наслідок. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.

Оскільки однорідна СЛАР завжди сумісна, то слушно поставити питання про умови існування ненульових розв'язків.

Твердження 4.3. Якщо ранг матриці $A_{m\times n}$ однорідної СЛАР дорівнює r, то система має $n-r$ лінійно незалежних (а, отже, ненульових) розв'язків.

Доведення твердження 4.3. див у *п. 4.4.3.*

Означення 4.6. Будь-яку сукупність з $n-r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР звуть *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР). Сукупність розв'язків $\vec{g}_j, j=\overline{1,n-r}$, СЛАР (4.7) звуть *нормальною фундаментальною системою розв'язків*.

Нехай $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-r}\}$ — ФСР однорідної СЛАР, тоді загальний розв'язок системи можна записати у вигляді:

$$\boxed{\vec{x}_0 = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + \ldots + C_{n-r}\vec{x}_{n-r} = \sum_{j=1}^{n-r} C_j\vec{x}_j.} \tag{4.9}$$

Формула (4.9) виражає *структуру загального розв'язку однорідної СЛАР*. Отже, кожний розв'язок системи лінійно виражається через сукупність розв'язків, які творять ФСР однорідної системи.

Вправа 4.2. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання вправи 4.2 див. у *п. 4.4.4.*

4.2.4. Дослідження неоднорідних СЛАР. Розгляньмо неоднорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0} \tag{4.10}$$

і відповідну їй однорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}. \tag{4.11}$$

Умову сумісності системи (4.10) виражає *Теорема 4.1.*

Теорема 4.2 (*про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР*)**.** Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР і частинного розв'язку неоднорідної СЛАР

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_* \Leftrightarrow \boxed{\vec{x} = \sum_{j=1}^{n-r} C_j \vec{x}_j + \vec{x}_*,} \tag{4.12}$$

де $\vec{x}_*$ — частинний розв'язок неоднорідної СЛАР, а $\vec{x}_0$ — загальний розв'язок відповідної однорідної СЛАР; $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-r}\}$ — ФСР відповідної однорідної СЛАР.

►Справді, з виведення формули загального розв'язку СЛАР випливає, що для нульових значень сталих у рівності (4.12) одержимо частинний розв'язок СЛАР $\vec{x}_* = \vec{d}$. Крім того,

$$A(\vec{x}_0 + \vec{x}_*) = A\vec{x}_0 + A\vec{x}_* = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b},$$

отже, $\vec{x}_0 + \vec{x}_*$ є розв'язком неоднорідної СЛАР для будь-якого набору значень сталих $C_j, j = \overline{1, n-r}$.◄

Вправа 4.3. Продемонструвати на загальному розв'язкові системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

теорему 4.2 про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР (скористатись результатом *п. 4.4.1*).

Розв'язання вправи 4.3 див. у *п. 4.4.5.*

Зведімо залежність кількості розв'язків від типу СЛАР до таблиці.

	Тип лінійної системи			
		однорідна	неоднорідна $n > m$	однорідна $n > m$
Кількість розв'язків	$0, 1, \infty$	$1, \infty$	$0, \infty$	∞

4.3. Формули Крамера. Матричні рівняння

4.3.1. Формули Крамера. Розгляньмо СЛАР у матричній формі

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.13}$$

із *квадратною матрицею* A n-го порядку, і нехай $\operatorname{rang} A = n$, тобто $|A| \neq 0$ — матриця A *оборотна* (*обернена матриця*).

Помножуючи обидві частини рівності (4.13) на A^{-1}, одержимо розв'язок СЛАР (4.10) і матричного рівняння (4.12), якому вона еквівалентна:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b};$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Враховуючи формулу для оберненої матриці (див. *Теорема 3.2*), дістанемо:

$$\left\| \begin{matrix} | \\ \vec{x} \\ | \end{matrix} \right\| = \frac{1}{|A|} A^* \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{matrix} \right\| = \frac{1}{|A|} \left\| \begin{matrix} | \\ A^*\vec{b} \\ | \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{|A|}\left(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n\right) \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$x_j = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \frac{1}{|A|} \begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} | & & | & & | \\ \vec{a}_1 & \ldots & \vec{b} & \ldots & \vec{a}_n \\ | & & | & & | \end{vmatrix} \end{array}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Це є розгорнутим записом *формул Крамера*:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = \overline{1,n},}$$

де Δ_j —визначник матриці, одержаної з матриці A заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів, а Δ — визначник матриці A.

Зауваження 4.3. Формули Крамера мають переважно теоретичний інтерес і у практичних обчисленнях (за винятком невироджених систем 2×2 та 3×3) їх застосовують рідко.

Вправа 4.4. Розв'язати методом Крамера СЛАР

$$\begin{cases} x + 4y = -10, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$$

Розв'язання вправи 4.4 див. у *п. 4.4.6.*

4.3.2. Матричні рівняння. Розгляньмо рівняння щодо матриці X

$$AX = B, \tag{4.14}$$

де A та B відомі матриці розміром $m\times n$ та $m\times l$. Тоді розв'язком цього рівняння є матриця X розміром $n\times l$:

$$X = \left\|\vec{x}_j\right\|_l, \vec{x}_j = \left\|x_{ij}\right\|_{n*}, j = \overline{1,l}.$$

З означення *добутку матриць* випливає, що

$$A\left\|\vec{x}_j\right\|_l = \left\|\vec{b}_j\right\|_l \Leftrightarrow A\vec{x}_j = \vec{b}_j, j = \overline{1,l}.$$

З'ясування розв'язності і розв'язання рівняння $AX = B$ зводиться до застосування методу Гауса до матриці $\|A \mid B\|$.

Якщо матриця A оборотна, то розв'язок матричного рівняння можна зобразити у вигляді

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

Але й у цьому випадку доцільніше розв'язувати матричне рівняння методом Ґауса. Виняток складає випадок, коли треба розв'язати низку рівнянь з однією і тою самою матрицею A, а стовпці вільних членів не відомі наперед.

У разі рівняння

$$XA = B,$$

де A, B — відомі матриці, розглядають матричне рівняння

$$A^T X^T = B^T.$$

Вправа 4.5. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання вправи 4.5 див. у *п. 4.4.7.*

4.4. Додаткові відомості

4.4.1. Розв'язання вправи 4.1. Дослідімо систему на сумісність, знайшовши ранг матриці системи і ранг розширеної матриці методом елементарних перетворень:

$$\left\Vert\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right\Vert \underset{\overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1}{\sim} \left\Vert\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right\Vert \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2.$$

Отже, система сумісна. Щоб знайти загальний розв'язок системи, продовжмо перетворення:

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{c}_1 = \overleftarrow{b}_1 + \frac{1}{3}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_2 = -\frac{1}{3}\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & C_1 & x_3 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \left\Vert\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{array}\right\Vert. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1, x_3 - \text{базисні змінні}, \\ x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3 - \text{вільні змінні}, \\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3, \\ x_4 = C_2, \\ x_5 = C_3. \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{Vmatrix}.$$

4.4.2. Доведення твердження 4.2. 1. Нехай стовпці $\vec{x}_1$ та $\vec{x}_2$ є розв'язками системи (4.8):

$$A\vec{x}_1 = \vec{0}, A\vec{x}_2 = \vec{0}.$$

Тоді стовпець $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ — також є розв'язком системи (4.7), бо

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

2. Нехай $A\vec{x} = \vec{0}$, тоді

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \vec{0}.$$

4.4.3. Доведення твердження 4.3. 1. Якщо $\operatorname{rang} A = 0$, то розв'язком такої системи буде будь-який стовпець заввишки n — а, отже, і система стовпців одиничної матриці

$$\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{Vmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

через які виражається будь-який стовпець заввишки n.

2. Якщо $\operatorname{rang} A = n$, то матриця A оборотна, і єдиним розв'язком системи буде нульовий стовпець:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$$

3. Розгляньмо випадок $1 \le r < n$. Тоді загальний розв'язок системи матиме вигляд (4.6) (враховуючи позначення (4.7)):

$$\vec{y} = C_1\vec{g}_1 + \dots + C_{n-r}\vec{g}_{n-r},$$

Стовпці $\vec{g}_j, j = \overline{1, n-r}$, будуть розв'язками однорідної СЛАР (4.8) при відповідних значеннях сталих:

$$C_j = 1, C_k = 0, k \ne j.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні. Справді, у матриці $G = \left\| \vec{g}_j \right\|_{n-r}$ є *мінор порядку* $n - r$, рівний одиниці (він розташований в останніх $n - r$ рядках), тому її ранг дорівнює $n - r$, а всі стовпці лінійно незалежні.

Доведімо, що будь-який розв'язок є лінійною комбінацією стовпців $\vec{g}_j, j = \overline{1, n-r}$.

Нехай $\vec{x} = \left\| x_j \right\|_n$ — довільний розв'язок системи. Позначмо

$$\alpha_j = x_{j+r}, \ j = \overline{1, n-r}.$$

Тоді

$$\vec{v} = \vec{x} - \sum_{j=1}^{n-r} \alpha_j \vec{g}_j$$

теж є розв'язком системи, причому $v_{j+r} = 0,\ j = \overline{1, n-r}$ — цей розв'язок відповідає нульовим значенням вільних невідомих, отже,

$$\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{x} \\ | \end{matrix} \right\| = \alpha_1 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{g}_1 \\ | \end{matrix} \right\| + \alpha_2 \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{g}_2 \\ | \end{matrix} \right\| + \ldots + \alpha_{n-r} \left\| \begin{matrix} | \\ \vec{g}_{n-r} \\ | \end{matrix} \right\|.$$

Будь-яка лінійна комбінація стовпців $\vec{g}_j, j = \overline{1, n-r}$, буде розв'язком на підставі твердження 4.2.

4.4.4. Розв'язання вправи 4.2. Знайдімо загальний розв'язок системи методом Ґауса — Йордана:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_2 - \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_4 = \overleftarrow{a}_4 - 4\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \overleftarrow{c}_2 = -\overleftarrow{b}_3 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \overleftarrow{d}_1 = \overleftarrow{c}_1 + 2\overleftarrow{c}_2 \\ \\ \overleftarrow{d}_3 = \overleftarrow{c}_3 - 5\overleftarrow{c}_2 \\ \overleftarrow{d}_4 = \overleftarrow{c}_4 - 4\overleftarrow{c}_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{matrix} \right\| \overleftarrow{e}_3 = -\frac{1}{8}\overleftarrow{d}_3 \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \overleftarrow{f}_1 = \overleftarrow{e}_1 - 3\overleftarrow{e}_3 \\ \overleftarrow{f}_2 = \overleftarrow{e}_2 - \overleftarrow{e}_3 \\ \\ \overleftarrow{f}_4 = \overleftarrow{e}_4 + 8\overleftarrow{e}_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & C_1 & C_2 \end{matrix} \\ \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \end{array}$$

$\operatorname{rang} A = r = 3$; x_1, x_2, x_3 — базисні змінні, $x_4 = C_1, x_5 = C_2$ — вільні змінні, $C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}C_1 + \dfrac{7}{8}C_2, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}C_1 + \dfrac{5}{8}C_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}C_1 - \dfrac{5}{8}C_2, \\ x_4 = C_1, \\ x_5 = C_2. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}C_1 + \frac{7}{8}C_2 \\ -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2 \\ \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix} = C_1 \underbrace{\begin{Vmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}}_{\vec{g}_1} + C_2 \underbrace{\begin{Vmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}}_{\vec{g}_2} = C_1\vec{g}_1 + C_2\vec{g}_2;$$

ФСР: $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$.

4.4.5. Розв'язання вправи 4.3. Перепишімо загальний розв'язок заданої системи (див. *п. 4.4.1*).

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -2C_1 \\ C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \frac{1}{3}C_2 \\ 0 \\ \frac{2}{3}C_2 \\ C_2 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|}_{\substack{\text{частинний} \\ \text{розв'язок} \\ \text{неоднорідної} \\ \text{СЛАР}}} + \underbrace{C_1 \left\| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| + C_2 \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + C_3 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|}_{\text{загальний розв'язок однорідної СЛАР}}.$$

4.4.6. Розв'язання вправи 4.4. Запишімо матрицю системи і стовпець вільних членів:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right\|, \vec{b} = \left\| \begin{matrix} -10 \\ 9 \end{matrix} \right\|.$$

За формулами Крамера (Δ_x відповідає Δ_1, а Δ_y відповідає Δ_2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -26;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 39;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{-13} = -3.$$

Відповідь. $x = 2, y = -3$.

4.4.7. Розв'язання вправи 4.5.

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\| \begin{matrix} \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_3 - 3\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim \left\| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 4 \end{array} \right\| \overleftarrow{c}_2 = (-\frac{1}{3})\overleftarrow{b}_2 \sim$$

$$\sim\left\|\begin{array}{ccc:cc}1&2&1&2&-1\\0&1&1&1&-1\\0&-3&-1&-4&4\end{array}\right\|\begin{array}{l}\overleftarrow{d}_1=\overleftarrow{c}_1-2\overleftarrow{c}_2\\ \\ \overleftarrow{d}_3=\overleftarrow{c}_3+3\overleftarrow{c}_2\end{array}\sim\left\|\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&0&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&2&-1&1\end{array}\right\|_{\overleftarrow{e}_3=\frac{1}{2}\overleftarrow{d}_3}\sim$$

$$\sim\left\|\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&0&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right\|\begin{array}{l}\overleftarrow{f}_1=\overleftarrow{e}_1+\overleftarrow{e}_3\\ \overleftarrow{f}_2=\overleftarrow{e}_2-\overleftarrow{e}_3\\ \end{array}\sim\left\|\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right\|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\left\|\begin{array}{cc}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right\|.$$