Модуль 5. Вектори. Лінійні дії над векторами

Структура модуля

Вступ

1. Ключові слова.

Вектор. Нульовий вектор. Довжина вектора. Колінеарні вектори. Однаково і протилежно напрямлені вектори. Компланарні вектори. Рівні вектори. Зв'язані вектори. Ковзні вектори. Вільні вектори.

Лінійні дії над векторами. Сума векторів. Правило трикутника. Правило паралелограма. Правило замикача. Добуток вектора на число. Орт вектора.

Лінійна комбінація векторів. Тривіальна лінійна комбінація. Лінійно залежна система векторів. Лінійно незалежна система векторів.

Колінеарна система векторів. Компланарна система векторів.

2. Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 5.1—5.4) та розширеному (розділи 5.1—5.5).

У модулі:

— розглянуто вектори — потужний математичний інструмент, який ефективно використовують у математиці, фізиці, інженерних науках тощо;

— запроваджено лінійні дії з векторами та подано їхні властивості;

— вивчено поняття лінійної залежності та лінійної незалежності векторів, подано геометричне тлумачення цих понять;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями).

Теоретична частина

5.1. Вектори

5.1.1. Векторні і скалярні величини. Величини, які можна схарактеризувати лише їхнім числовим значенням, звуть *скалярними* ($\Leftrightarrow$ *скалярами*). Приміром, довжина лінії, об'єм тіла, маса, робота, температура тощо. Число, яке характеризує ту чи іншу величину, знаходять порівнянням її з вибраним еталоном, узятим за одиницю вимірювання.

У фізиці *векторними величинами* ($\Leftrightarrow$ *векторами*) звуть ті, які характеризуються не лише їхнім числовим значенням, але й напрямом у просторі, як, приміром, сила, швидкість, прискорення тощо.

Для вивчення загальних властивостей, притаманних усім векторним величинам, у математиці запроваджують поняття абстрактного математичного вектора, у якому збережено лише те загальне, що мають усі фізичні вектори.

Вектори позначають $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$. Вектор зображують напрямленим відрізком, тобто відрізком, для якого зазначено, яку з його кінцевих точок вважають першою, її звуть *початком вектора*, яку — другою, її звуть *кінцем вектора*. Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор звуть *нульовим* і позначають $\overline{0}$.

Означення 5.1. *Вектором* звуть впорядковану пару точок.

Якщо напрямлений відрізок $\overline{AB}$ зображує вектор $\overline{a}$, то пишуть, що

$$\overline{AB} = \overline{a}.$$

Напрям вектора на рисунку вказують стрілкою (рис. 5.1). Інколи й напрямлені відрізки звуть векторами. Це не зовсім точно: об'єкт та його зображення це не те саме.

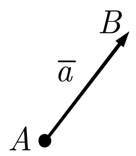


Рис. 5.1

Довжиною вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ звуть віддаль між точками A та B, і позначають як $|\overline{a}|, \left|\overline{AB}\right|$. Довжина нульового вектора (і лише його) дорівнює нулеві.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, звуть *одиничним*.

5.1.2. Колінеарні та компланарні вектори. Кажуть, що вектор $\overline{a}$ *паралельний прямій* (*площині*), якщо напрямлений відрізок, який його зображує, паралельний цій прямій (площині).

Означення 5.2. Вектори, що лежать на паралельних прямих звуть *колінеарними* (рис. 5.2).

Колінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають як $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому векторові.

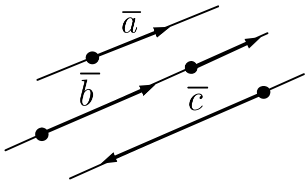


Рис. 5.2

Колінеарні ненульові вектори можуть мати однакові або протилежні напрями. У першому випадку їх звуть *однаково напрямленими*, у другому — *протилежно напрямленими*.

На рис. 5.3 вектори $\overline{AB}$ та $\overline{EF}$ однаково напрямлені (позначають $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{EF}$), а вектори $\overline{AB}$ та $\overline{CD}$ або $\overline{AB}$ та $\overline{GH}$ — протилежно напрямлені (позначають $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}, \overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{GH}$).

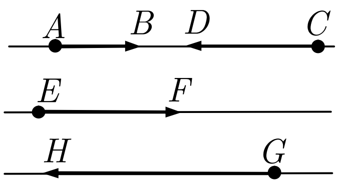


Рис. 5.3

Означення 5.3. Вектори, які паралельні одній і тій самій площині, звуть *компланарними* (рис. 5.4).

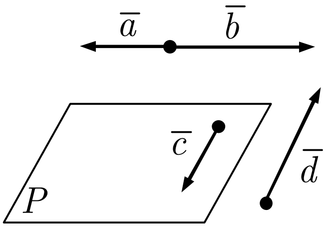


Рис. 5.4

5.1.3. Рівність векторів.

Означення 5.4. Вектори звуть *рівними*, якщо вони мають рівні довжини й однаково напрямлені (рівність нульових векторів визначається лише першою умовою) (рис. 5.5):

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow |\overline{a}| = \left|\overline{b}\right| \wedge \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}.$$

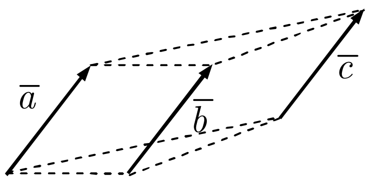


Рис. 5.5

Приміром, три зображених на рис. 5.6 вектори мають однаковий напрям і довжину, але із двох «пунктирних» — один має відмінну від них довжину, другий — відмінний напрям.

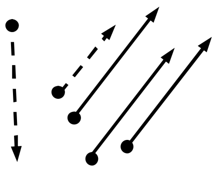


Рис. 5.6

Очевидно, що:

1) якщо $\overline{a} = \overline{b}$, то $\overline{b} = \overline{a}$;

2) якщо $\overline{a} = \overline{b}, \overline{b} = \overline{c}$, то $\overline{a} = \overline{c}$.

З означення 5.4 випливає, що рівні вектори можна переносити паралельно самім собі (таке перенесення не міняє їхніх довжин і напрямів). Однак не завжди такі перенесення допустимі.

Приміром, $\overline{v}$ — швидкість частинки води гірського водоспаду в який-небудь момент (рис. 5.7). Вряд чи можна твердити, що швидкість потоку в будь-якій іншій точці буде та сама. За фізичним змістом цей вектор не можна переносити в іншу точку простору. Такі вектори звуть *зв'язаними* ($\Leftrightarrow$ прикладеними).

Якщо тепер $\overline{v}$ — швидкість тросу якого-небудь перерізу, що рівномірно підіймає вантаж (рис. 5.8), то перенесення цього вектора вздовж прямої дії сили натягу цілком можливе. Такі вектори звуть *ковзними*.

Якщо, нарешті, $\overline{v}$ — швидкість кабіни ліфта (рис. 5.9), то вектор можна перенести в будь-яку її точку. Такі вектори звуть *вільними*.

Рис. 5.7

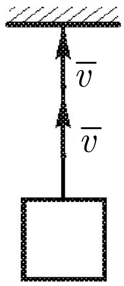


Рис. 5.8

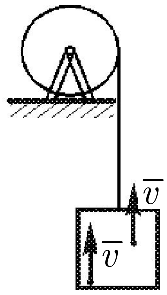


Рис. 5.9

Вільний вектор — це множина рівних (у розумінні означення 5.4) між собою векторів.

5.1.4. Відкладання вектора від точки. Відкласти від певної точки вектор, рівний заданому, означає побудувати напрямлений відрізок з початком у цій точці, що зображує цей вектор. Від будь-якої точки можна відкласти вектор, рівний заданому, й до того ж лише один.

Справді, нехай задано вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ і точку C (рис. 5.10). Тоді знайдеться єдина точка D така, що $\overline{CD} = \overline{AB}$. Якщо точка C не лежить на прямій AB, то побудувавши паралелограм $ABCD$, знайдімо шукану точку D. Якщо ж точка C лежить на прямій AB, то на тому промені прямої AB, який має початок у точці C й однаково напрямлений із променем AB, відкладаємо відрізок CD, рівний відрізкові AB. В обох випадках точка D єдина.

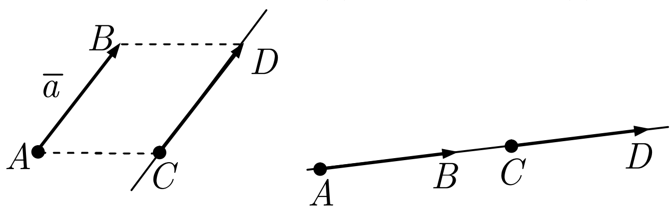


Рис. 5.10

5.2. Лінійні дії над векторами

5.2.1. Додавання векторів. *Лінійними діями над векторами* звуть додавання (віднімання) векторів та множення вектора на число.

Нехай задано два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Візьмімо деяку точку O і відкладімо від неї вектор $\overline{a}$: $\overline{OA} = \overline{a}$. Від одержаної точки A відкладімо вектор $\overline{b}$: $\overline{AB} = \overline{b}$ (рис. 7.11).

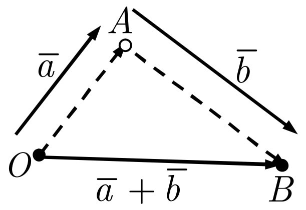


Рис. 5.11

Означення 5.5. *Сумою* $\overline{a}+\overline{b}$ векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ звуть вектор, який зображують напрямленим відрізком $\overline{OB}$. Таке правило додавання векторів звуть *правилом трикутника*.

Якщо відкласти вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ від спільної точки O і побудувати на них як на боках паралелограм, то напрямлений відрізок $\overline{OB}$ також зображує їхню суму $\overline{a}+\overline{b}$ (*правило паралелограма*) (рис. 5.12).

Сумою скінченної кількості n векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ звуть вектор, який зображують замикачем $\overline{OA_n}$ (*правило замикача*) (рис. 5.13).

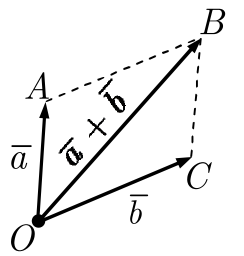


Рис. 5.12

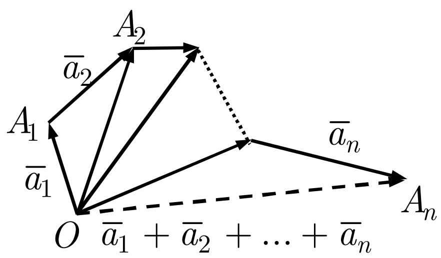


Рис. 5.13

Сума векторів не залежить від вибору точки відкладання. Справді, якщо взяти іншу точку O_1 і відкласти вектори $\overline{O_1A_1} = \overline{a}$ та $\overline{A_1B_1} = \overline{b}$, то дістанемо вектор $\overline{O_1B_1} = \overline{OB}$ (рис. 5.14).

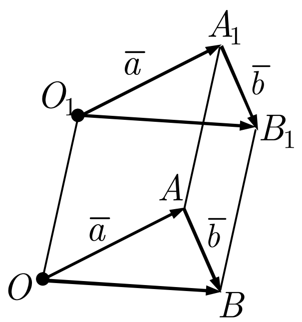


Рис. 5.14

5.2.2. Властивості додавання векторів. Для довільних векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$:

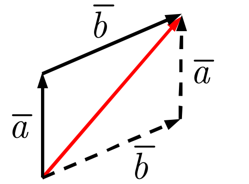
1) існує єдиний вектор $\overline{a}+\overline{b}$, який звуть *сумою* векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (*комутативність додавання векторів*) (рис. 5.15);

3) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (*асоціативність додавання векторів*) (рис. 5.16);

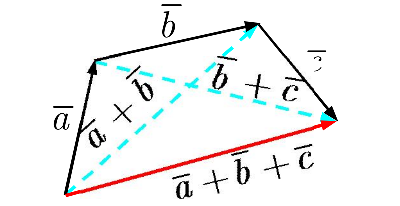
4) існує (єдиний) нульовий вектор $\overline{0}$, такий що $\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}$ (*існування нульового вектора*);

5) існує (єдиний) *вектор* $(-\overline{a})$, який звуть *протилежним вектору* $\overline{a}$, такий що $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$ (*існування протилежного вектора*).



$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

Рис. 5.15



$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$

Рис. 5.16

Вектор $(-\overline{a})$, *протилежний вектору* $\overline{a}$, має ту саму довжину, що й вектор $\overline{a}$, колінеарний йому і протилежно напрямлений (рис. 5.17). Під *різницею* векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ розуміють суму вектора $\overline{a}$ з вектором, протилежним вектору $\overline{b}$ (рис. 5.18)

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$$

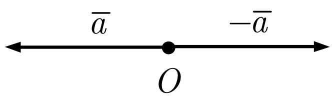


Рис. 5.17

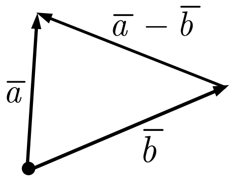


Рис. 5.18

Твердження 5.1. Для довільних векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ правдива *нерівність трикутника*

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|\le|\overline{a}|+\left|\overline{b}\right|. \qquad (5.1)$$

Доведення твердження 5.1 див. у *п. 5.5.1.*

Вправа 5.1. Яку умову мають справджувати ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, щоб виконувалась рівність $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$?

Розв'язання вправи 5.1 див. у *п. 5.5.2.*

5.2.3. Множення вектора на число. Нехай $\overline{a}\ne 0$ і $\lambda>0$. Виберімо точку A, напрямлений відрізок $\overline{AB}$, що зображує вектор $\overline{a}$, і таку точку C, що: C належить прямій AB; C лежить з того самого боку від точки A, що й точка B (рис. 5.19)

$$\left|\overline{AC}\right|=\lambda\left|\overline{AB}\right|=\lambda|\overline{a}|.$$

Тоді $\lambda\overline{a}$ — це вектор, що зображується напрямленим відрізком $\overline{AC}$.

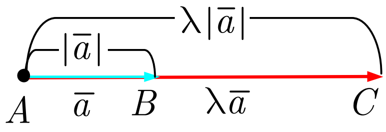


Рис. 5.19

Якщо $\overline{a} \neq \overline{0}, \lambda < 0$, то вважатимемо $\lambda\overline{a} = -((-\lambda)\overline{a})$ (рис. 5.18) Нарешті, $0\overline{a} = \overline{0}$ для будь-яких векторів $\overline{a}$; $\lambda\overline{0} = \overline{0}$ для будь-яких чисел λ.

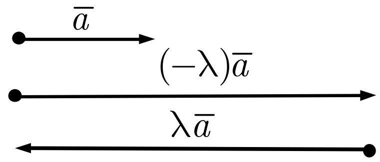


Рис. 5.20

Означення 5.6. *Добутком* $\lambda\overline{a}$ *вектора* $\overline{a} \neq \overline{0}$ *на число* $\lambda \neq 0$ звуть вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda||\overline{a}|$, і який однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений з вектором $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$ або $\overline{a} = \overline{0}$, то вважають, що $\lambda\overline{a} = \overline{0}$.

Під часткою $\dfrac{\overline{a}}{\lambda}$, де $\lambda \neq 0$, розуміють вектор $\dfrac{1}{\lambda}\overline{a}$.

Якщо $\overline{a} \neq \overline{0}$, то вектор

$$\frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} \overset{\text{den}}{=} \overline{a}^0$$

має одиничну довжину й той самий напрям, що й вектор $\overline{a}$ $(\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}^0, \left|\overline{a}^0\right| = 1)$. Його звуть *ортом вектора* $\overline{a}$. Отже,

$$\boxed{\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}_0.}$$

5.2.4. Властивості множення вектора на число. Для довільних векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і для довільних дійсних чисел λ та μ:

6) існує єдиний вектор $\lambda \cdot \overline{a}$, що його звуть *добутком вектора* $\overline{a}$ *на число* λ;

7) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$ (та $(-\overline{a}) = (-1) \cdot \overline{a}$);

8) $\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{a}) = (\lambda\mu) \cdot \overline{a}$ (*асоціативність множення вектора на число*);

9) $(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a}$ (*дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання чисел*);

10) $\lambda \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$ (*дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання векторів*).

Властивості лінійних дій над векторами 1)—10) дозволяють виконувати звичні перетворення в лінійних діях над векторами: міняти доданки місцями, брати вирази в дужки, групувати, виставляти за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

Вправа 5.2. На яке число λ треба помножити ненульовий вектор $\overline{a}$, щоб одержати вектор $\overline{m}$ такий, що:

1) $\overline{m} \uparrow\uparrow \overline{a}, \overline{m} \neq \overline{0}$; 2) $\overline{m} \downarrow\uparrow \overline{a}, \overline{m} \neq \overline{0}$; 3) $\overline{m} = \overline{0}$?

Розв'язання вправи 5.2 див. у *п. 5.5.3.*

Вправа 5.3. З точки O відкладено два вектори $\overline{a} = \overline{OA}$ та $\overline{b} = \overline{OB}$. Знайти який-небудь вектор $\overline{OM}$, який напрямлений уздовж бісектриси кута AOB.

Розв'язання вправи 5.3 див. у *п. 5.5.4.*

5.3. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів

Означення 5.8. *Лінійною комбінацією векторів* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ звуть вектор

$$\overline{x} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n.$$

При цьому кажуть, що вектор $\overline{x}$ *лінійно виражається через вектори* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$; його *розкладено за векторами* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

Лінійну комбінацію звуть *тривіальною*, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулеві. Якщо ж не всі коефіцієнти рівні нулеві, то лінійну комбінацію звуть *нетривіальною*.

Означення 5.9. Систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ звуть *лінійно залежною*, якщо існує їхня нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нуль-векторові.

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}.$$

Систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ звуть *лінійно незалежною*, якщо з рівності нуль-вектору будь-якої лінійної комбінації цих векторів випливає її тривіальність.

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

З означення випливає, що порожня система векторів — лінійно незалежна, адже не існує жодної нетривіальної лінійної комбінації векторів такої системи.

Теорема 5.1. Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ лінійно залежні тоді й лише тоді, коли один з векторів лінійно виражається через решту.

Теорема 5.1 доводиться так само як і *Теорема 2.1.*

Наслідок 1. Якщо система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ містить нульовий вектор, то система лінійно залежна.

Наслідок 2. Якщо підсистема $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s$ векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ лінійно залежна, то вся система також лінійно залежна.

Наслідок 3. Якщо система векторів $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ лінійно незалежна, то й будь-яка її частина теж лінійно незалежна.

Наслідок 4. 1. Один вектор лінійно залежний (незалежний) тоді й лише тоді, коли він нульовий (ненульовий).
2. Система із двох векторів лінійно залежна (незалежна) тоді й лише тоді, коли вектори колінеарні (неколінеарні).
3. Система із трьох векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли вони компланарні.

Наслідки 1—3 доводяться так само як і наслідки 1—3 теореми 2.1. Незалежне доведення наслідку 4 див. у *п. 5.5.5.*
Отже, правдиве

Твердження 5.2 (*критерій колінеарності векторів*). Вектори $\overline{a} \neq \overline{0}$ та $\overline{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли існує таке число λ, що $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a}, \ \ \overline{a} \neq \overline{0}.}$$

Теорема 5.2. Якщо вектор $\overline{y}$ лінійно виражається через вектори $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ лінійно незалежної системи, що це зображення єдине.

►Нехай існує дві лінійні комбінації, що зображують вектор $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n,$$

$$\overline{y} = \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + \ldots + \beta_n\overline{a}_n.$$

Віднімаючи ці рівності, одержимо

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overline{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\overline{a}_n = \overline{0}.$$

З лінійної незалежності системи векторів $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ випливає, що

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \overline{i = 1, n} \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \overline{i = 1, n}. \blacktriangleleft$$

5.4. Геометричне тлумачення лінійної залежності

5.4.1. На прямій. Загальна задача, яку розглядатимемо в цьому розділі, така:
скільки і яких векторів на прямій, на площині й у просторі треба задати, щоб їхньою лінійною комбінацією можна було б однозначно зобразити будь-який вектор на прямій, на площині й у просторі?

Твердження 5.3. На прямій L існує ненульовий вектор $\overline{e}$. Будь-який вектор $\overline{a}$, колінеарний ненульовому вектору $\overline{e}$, можна лінійно виразити через цей вектор.

►Розгляньмо на прямій L дві різні точки — O та E (рис. 5.21). Отже, на прямій L існує ненульовий вектор $\overline{e} = \overline{OE}$, що утворює лінійно незалежну систему (див. *Наслідок 4 з теореми 5.1*).

Відкладімо вектор $\overline{a}$ від точки O (рис. 5.21):

$$\overline{a} = \overline{OM}.$$

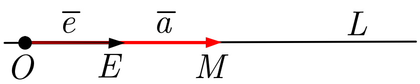


Рис. 5.21

Тоді з означення добутку вектора на число випливає, що

$$\overline{a} = x\overline{e}, \tag{5.2}$$

де

$$x = \begin{cases} \dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OE}|}, & \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{e}, \\ 0, & M = O, \\ -\dfrac{|\overline{OM}|}{|\overline{OE}|}, & \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{e}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Із твердження 5.3 випливає, що будь-яка система із двох векторів на прямій — лінійно залежна.

5.4.2. На площині.

Твердження 5.4. На площині існують два неколінеарних вектори $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$. Будь-який вектор $\overline{a}$, компланарний з векторами $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$, єдиним чином лінійно виражається через них (рис. 5.22):

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2. \tag{5.3}$$

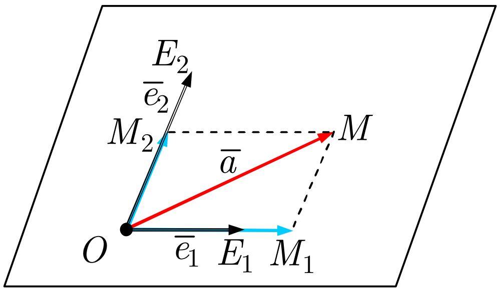


Рис. 5.22

Про паралельне проектування точки паралельно прямій див. *п. 5.5.6*. Доведення твердження 5.4 див. у *п. 5.5.7.*

З твердження 5.4 випливає, що будь-яка система із трьох векторів на площині — лінійно залежна.

5.4.3. У просторі.

Твердження 5.5. У просторі існує три некомпланарних вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$. Будь-який вектор $\overline{a}$ простору єдиним чином лінійно виражається через некомпланарні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$ (рис. 5.23):

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3.$$

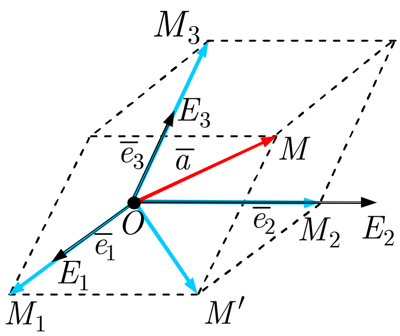


Рис. 5.23

Про паралельне проектування точки паралельно прямій та паралельно площині див. у *п. 5.5.8* та *п. 5.5.9.* Доведення твердження 5.5 див. у *п. 5.5.10.*

З твердження 5.5 випливає, що будь-яка система з чотирьох векторів у просторі лінійно залежна.

Важливі висновки.

1. На прямій, на площині й у просторі існують лінійно незалежні системи відповідно з одного, двох та трьох векторів.
2. На прямій, на площині й у просторі будь-які системи відповідно із двох, трьох та чотирьох (і більше) векторів лінійно залежні.

5.5. Додаткові відомості

5.5.1. Доведення твердження 5.1. Справді, якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні, то вектор $\overline{a}+\overline{b}$, якщо він ненульовий, колінеарний векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$ (якщо вектор $\overline{a}+\overline{b}$ нульовий, то нерівність, очевидно, правдива). Довжина вектора $\overline{a}+\overline{b}$ дорівнює сумі довжин доданків, якщо вони однаково напрямлені, і різниці довжин доданків, якщо вони протилежно напрямлені.

У разі неколінеарних і не рівних нуль-векторові векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ нерівність (5.1) випливає з того, що сума двох сторін трикутника більше третьої (див. рис. 5.11).

5.5.2. Розв’язання вправи 5.1. Побудуймо на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, відкладених від точки O, паралелограм $OADB$ (рис. 5.24). Тоді

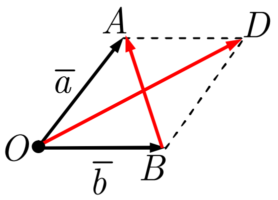


Рис. 5.24

$$\overline{OD}=\overline{a}+\overline{b},\ \overline{BA}=\overline{a}-\overline{b}.$$

Рівність

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$$

означає, що довжини діагоналей паралелограма рівні. Отже, цей паралелограм є прямокутником. Тобто вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — перпендикулярні.

5.5.3. Розв’язання вправи 5.2.

1) $\overline{m}\uparrow\uparrow\overline{a}\Rightarrow\exists\lambda:\overline{m}=\lambda\overline{a},\lambda>0.\ |\overline{m}|=\lambda|\overline{a}|\Rightarrow\lambda=\dfrac{|\overline{m}|}{|\overline{a}|}$;

2) $\overline{m}\downarrow\uparrow\overline{a}\Rightarrow\exists\lambda:\overline{m}=\lambda\overline{a},\lambda<0.\ |\overline{m}|=-\lambda|\overline{a}|\Rightarrow\lambda=-\dfrac{|\overline{m}|}{|\overline{a}|}$;

3) $\overline{m}=\lambda\overline{a}=\overline{0}\Rightarrow 0=|\overline{m}|=|\lambda||\overline{a}|\Rightarrow|\lambda|=0\Rightarrow\lambda=0.$

5.5.4. Розв’язання вправи 5.3. Знайдімо орти $\overline{a}^0=\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ та $\overline{b}^0=\dfrac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}$ і на них, як на боках побудуймо ромб. Діагональ ромба — шуканий вектор $\overline{OM}=\overline{a}^0+\overline{b}^0$ (рис. 5.25).

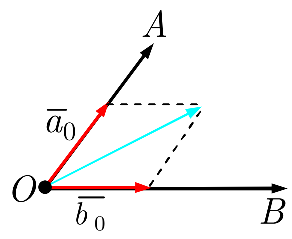


Рис. 5.25

5.5.5. Доведення наслідку 4 з теореми 5.1. 1. Розгляньмо рівність

$$\lambda\overline{a} = \overline{0}.$$

Якщо $\overline{a} \neq \overline{0}$, то з неї випливає, що $\lambda = 0$. Отже, система з одного вектора $\overline{a}$ — лінійно незалежна. Якщо $\overline{a} = \overline{0}$, то рівність виконуватиметься, приміром, для $\lambda = 1$. Отже, система з нульового вектора — лінійно залежна.

2. Нехай вектори $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$ лінійно залежні, тобто

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 = 0.$$

Нехай, приміром, $\lambda_1 \neq 0$. Тоді,

$$\overline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a}_2 = \alpha\overline{a}_2.$$

З означення добутку вектора $\overline{a}_2$ на число α випливає, що вектори $\overline{a}_2$ та $\alpha\overline{a}_2 = \overline{a}_1$ колінеарні.

І навпаки, з колінеарності векторів $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$ випливає, що один з них можна «розтягнути» або «стиснути», помноживши на число α, так, щоб одержати другий вектор, тобто

$$\overline{a}_1 = \alpha\overline{a}_2 \text{ або } \overline{a}_2 = \beta\overline{a}_1,$$

що й означає лінійну залежність системи векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2$.

5.5.6. Проекція точки на пряму паралельно іншій прямій. Нехай на площині задано дві перетинні в точці O прямі L_1 та L_2 (рис. 5.26). Якщо точка M не лежить на прямій L_2, то проекцією точки M на пряму L_1 паралельно прямій L_2 звуть точку M' перетину прямої L_1 із прямою, що проходить через точку M паралельно прямій L_2. Якщо ж точка M лежить на прямій L_2, то її проекцією на пряму L_1 паралельно прямій L_2 звуть точку O.

5.5.7. Доведення твердження 5.4. Розгляньмо на площині три точки — O, E_1, та E_2, що не лежать на одній прямій (рис. 5.22). Отже, на площині існує два неколінеарних вектори $\overline{e}_1 = \overline{OE_1}$ та $\overline{e}_2 = \overline{OE_2}$, що творять лінійно незалежну систему $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ (див. *Наслідок 4 з теореми 5.1*).

Відкладімо вектор $\overline{a}$ від точки O (див. рис. 5.22): $\overline{a} = \overline{OM}$.

Завдяки компланарності векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{a}$ точки O, E_1, E_2, M — лежать в одній площині.

Нехай точка M_1 — проекція точки M на пряму OE_1 паралельно прямій OE_2 та M_2 — проекція точки M на пряму OE_2 паралельно прямій OE_1. Тоді

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}.$$

Вектор $\overline{a}_{\overline{e}_1} = \overline{OM_1} \parallel \overline{e}_1$, отже, за твердженням 5.3,

$$\exists!\, x : \overline{a}_{\overline{e}_1} = x\overline{e}_1.$$

Вектор $\overline{a}_{\overline{e}_2} = \overline{OM_2} \parallel \overline{e}_2$, отже,

$$\exists!\, y : \overline{a}_{\overline{e}_2} = y\overline{e}_2.$$

Тому

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2.$$

5.5.8. Проекція точки на площину паралельно прямій. Нехай у просторі задано площину P і пряму L, яка перетинає її у точці O (рис. 5.27).

Якщо точка M не лежить на прямій L, то *проекцією точки* M *на площину* P *паралельно прямій* L звуть точку M' перетину площини P із прямою, що проходить через точку M паралельно прямій L. Якщо ж точка M лежить на прямій L, то її проекцією звуть точку O.

5.5.9. Проекція точки на пряму паралельно площині. Нехай у просторі задано площину P і пряму L, що перетинає її у точці O (рис. 5.28).

Якщо точка M не лежить на площині P, то її *проекцією на пряму* L *паралельно площині* P звуть точку M $(P' \parallel P)$. Якщо ж точка M лежить на площині P, то її проекцією на пряму L паралельно площині P звуть точку O.

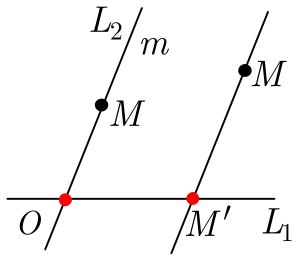


Рис. 5.26

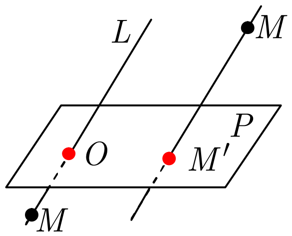


Рис. 5.27

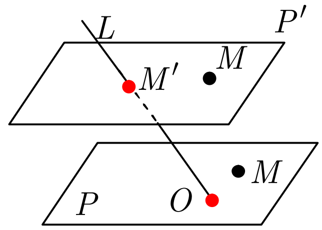


Рис. 5.28

5.5.10. Доведення твердження 5.5. Розгляньмо у просторі чотири різні точки — O, E_1, E_2 та E_3, що не лежать в одній площині (див. рис. 5.23). Отже, у просторі існує три некомпланарних вектори $\overline{e}_1 = \overline{OE_1}, \overline{e}_2 = \overline{OE_2}, \overline{e}_3 = \overline{OE_3}$, що творять лінійно незалежну систему $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ (див. *Наслідок 4 з теореми 5.1*).

Відкладімо вектор $\overline{a}$ від точки O (див. рис. 5.23): $\overline{a} = \overline{OM}$.

Нехай точка M_3 — проекція точки M на пряму OE_3 паралельно площині OE_1E_2, та точка M' — проекція точки M на площину OE_1E_2 паралельно прямій OE_1.

Тоді

$$\overline{OM} = \overline{OM'} + \overline{OM_3}.$$

Вектор $\overline{a}_{\overline{e}_3} = \overline{OM_3} \parallel \overline{e}_3$ і за *Твердженням 5.3*

$$\exists!\, z : \overline{a}_{\overline{e}_3} = z\overline{e}_3.$$

За твердженням 5.4 вектор $\overline{OM'}$ єдиним чином лінійно виражається через вектори $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$:

$$\overline{OM'} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2.$$

Звідси випливає, що

$$\overline{a} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}. \tag{5.4}$$