Модуль 6. Лінійні простори. Координати вектора

Структура модуля

Вступ

1. Ключові слова

Лінійний простір. Простір n-вимірних арифметичних векторів.

Базис лінійного простору. Вимірність. Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори. Розклад вектора за базисом. Координати вектора в базисі. Матриця переходу від одного базису до другого.

Радіус-вектор точки. Вісь. Координата точки. Кут між векторами. Перпендикулярні вектори. Вісь абсцис, ординат, аплікат. Система координат на прямій. Декартова система координат на площині й у просторі.

Поділ відрізка у заданому відношенні. Координати центра мас системи матеріальних точок.

2. Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 6.1—6.5) та розширеному (розділи 6.1—6.6).

У модулі:

— розглянуто і вивчено поняття лінійного простору, його базису і вимірності;

— означено важливе поняття координат вектора, що дозволяє звести всі дії над векторами до відповідних дій над їхніми координатами;

— запроваджено Декартові системи координат на прямій, на площині й у просторі;

— розглянуто найпростіші задачі аналітичної геометрії;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

6.1. Лінійні простори

6.1.1. Означення лінійного простору. У курсах математичного аналізу та лінійної алгебри доводиться мати справу з об'єктами розмаїтої природи — дійсними та комплексними числами, геометричними та арифметичними векторами, матрицями. Для кожного з таких об'єктів установлені дії додавання об'єктів та множення їх на число. Ці дії, не зважаючи на відмінності в їхньому означенні, у природі об'єктів, над якими вони виконуються, мають істотні спільні властивості. Вивчення спільних властивостей об'єктів та абстрагування від конкретної природи цих об'єктів приводить до поняття лінійного простору.

Означення 6.1. Множину $\mathbb{V}$ звуть *лінійним* ($\Leftrightarrow$ *векторним*) *простором*, якщо:

1) є правило, згідно з яким кожним двом елементам $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ з $\mathbb{V}$ відповідає третій елемент із $\mathbb{V}$, який звуть *сумою* $\overline{v}_1$ та $\overline{v}_2$ і позначають $\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2$:

$$\forall \overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \mathbb{V} \Rightarrow \overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2 \in \mathbb{V};$$

2) є правило, згідно з яким кожному елементу $\overline{v} \in \mathbb{V}$ і будь-якому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ відповідає елемент із $\mathbb{V}$, який звуть *добутком елемента* $\overline{v}$ *на число* α і позначають $\alpha \odot \overline{v}$:

$$\forall \overline{v} \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \odot \overline{v} \in \mathbb{V};$$

3) запроваджені операції справджують певні умови — аксіоми лінійного простору.

$\forall \overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3 \in \mathbb{V},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

I. $\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2 = \overline{v}_2 \oplus \overline{v}_1$.

II. $(\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2) \oplus \overline{v}_3 = \overline{v}_1 \oplus (\overline{v}_2 \oplus \overline{v}_3)$.

III. $\exists \overline{0} \in \mathbb{V} : \overline{v} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{v} = \overline{v}$. Елемент $\overline{0}$ звуть *нульовим*.

IV. $\exists (\ominus \overline{v}) : \overline{v} \oplus (\ominus \overline{v}) = \overline{0}$. Елемент $(\ominus \overline{v})$ звуть *протилежним* $\overline{v}$.

V. $\alpha \odot (\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2) = (\alpha \odot \overline{v}_1) \oplus (\alpha \odot \overline{v}_2)$.

VI. $(\alpha + \beta) \odot \overline{v} = (\alpha \odot \overline{v}) \oplus (\beta \odot \overline{v})$.

VII. $(\alpha\beta) \odot \overline{v} = \alpha \odot (\beta \odot \overline{v})$.

VIII. $1 \odot \overline{v} = \overline{v}$.

Елементи лінійного простору $\mathbb{V}$ звуть *векторами* (незалежно від їх природи).

Дія додавання векторів — комутативна (I), асоціативна (II), для неї існує нейтральний елемент — нуль-вектор $\overline{0}$ (III) та симетричний елемент — протилежний вектор (IV).

Дія множення вектора на число — дистрибутивна щодо додавання векторів (V), дистрибутивна щодо додавання чисел (VI), асоціативна (VII), для неї існує нейтральний елемент — 1 (VIII).

Вектор $\overline{v}_1 \oplus (\ominus \overline{v}_2)$ звуть *різницею векторів* $\overline{v}_1$ та $\overline{v}_2$ і позначають $\overline{v}_1 \ominus \overline{v}_2$.

Наслідки з аксіом I — VIII див. у *п. 6.6.1.*

6.1.2. Приклади лінійних просторів. 1. Сукупність вільних *векторів* із запровадженими *лінійними діями над векторами*.

2. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Сукупність упорядкованих наборів $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ з n дійсних чисел, якщо рівність наборів, додавання та множення набору на число означити поелементно. Ці набори можна записувати як *матриці-стовпці* або *матриці-рядки*, а отже, додавати і множити на число як стовпці або рядки (див. *1.2. Лінійні дії над стовпцями (рядками) матриці*).

З означень лінійних дій над стовпцями (рядками) та властивостей дій над числами випливає виконання аксіом I– VIII.

Означення 6.2. Сукупність упорядкованих наборів з n чисел звуть *простором n-вимірних арифметичних векторів* $\mathbb{R}^n$, а його елементи — *n-вимірними арифметичними векторами*.

4. Сукупність матриць $\mathbb{R}^{m \times n}$ розміру $m \times n$ з означеними діями додавання та множення на число матриць (див. розд. *1.3. Лінійні дії над матрицями*). Зокрема, сукупність матриць-рядків завдовжки n — $\mathbb{R}^{1 \times n}$ та матриць-стовпців заввишки n — $\mathbb{R}^{n \times 1}$ (див. розд. *1.2. Лінійні дії над стовпцями (рядками) матриці*).

Для того щоб з'ясувати, чи є деяка множина лінійним простором щодо запроваджених на ній дій додавання і множення елемента на число, треба перевірити виконання аксіом I — VIII лінійного простору.

Вправа 6.1. Перевірити, чи є лінійним простором множина додатних чисел P, якщо під додаванням «векторів» $(\oplus)$ розуміти множення чисел, а під множенням «вектора» на число α $(\odot)$ — піднесення його до степеня α:

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = xy; \quad \alpha \odot \overline{x} = x_\alpha\,?$$

Розв'язання вправи 6.1 див. у *п. 6.6.2.*

Вправа 6.2. Показати, що будь-яка система з $(n+1)$-го вектора n-вимірного арифметичного простору *лінійно залежна*.

Розв'язання вправи 6.2 див. у *п. 6.6.3.*

6.2. Базис лінійного простору

6.2.1. Основні поняття. Нехай $\mathbb{V}$ — довільний лінійний простір, що містить не лише нульовий вектор. Це означає, що в ньому є хоча б один ненульовий вектор, а, отже, існує *лінійно незалежна система* принаймні з одного вектора. Можливі два випадки:

1) у просторі міститься скінченна кількість лінійно незалежних векторів;
2) у просторі міститься нескінченна кількість лінійно незалежних векторів.

Означення 6.3. *Базисом* лінійного простору звуть будь-яку лінійно незалежну систему з найбільшою можливою кількістю векторів. Кількість векторів базису простору звуть його *вимірністю*.

Лінійний простір звуть *скінченновимірним* (позначають $\mathbb{V}^n$), якщо він має базис із скінченної кількості векторів (а саме n) та *нескінченновимірним*, якщо в ньому існує будь-яка кількість лінійно незалежних векторів.

6.2.2. Приклади базисів. У кожному лінійному просторі можна вказати скільки завгодно базисів, але при цьому всі базиси простору містять однакову кількість векторів.

1. Базис на прямій — в одновимірному просторі $\mathbb{V}^1$ — творить будь-який ненульовий вектор.

2. Базис на площині — у двовимірному просторі $\mathbb{V}^2$ — творять будь-які два *неколінеарні вектори* (*колінеарні вектори*).

3. Базис у просторі — у тривимірному просторі $\mathbb{V}^3$ — творять будь-які три *некомпланарні вектори* (*компланарні вектори*).

4. «Стандартний» базис простору $\mathbb{R}^n$ n-вимірних арифметичних векторів творять вектори

$$\overline{e}_j = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0, \ldots, 0), \ j = \overline{1, n}.$$

5. Базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратних матриць порядку 2 творять матриці:

$$D_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, D_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, D_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, D_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже, цей простір — чотиривимірний.

6. Базис простору розв'язків однорідної системи

$$A_{m\times n}\vec{x} = \vec{0},$$

що має ненульові розв'язки, творить її ФСР. Вимірність цього лінійного простору дорівнює кількості елементів ФСР, тобто $n - r$, де r — ранг матриці однорідної системи, а n — кількість невідомих.

6.3. Координати вектора у фіксованому базисі

6.3.1. Координати вектора.

Твердження 6.1. Якщо кожний з $(n+1)$ векторів $\overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_n$ системи є лінійною комбінацією n векторів $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, то система з векторів $\overline{y}_i, i = \overline{0, n},$— лінійно залежна.

Теорема 6.1 (*про базис*). Система лінійно незалежних векторів $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ лінійного простору $\mathbb{V}^n$ творить базис простору $\mathbb{V}^n$ тоді й лише тоді, коли будь-який вектор $\overline{x} \in \mathbb{V}^n$ лінійно виражається через вектори $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$.

► $\boxed{\Rightarrow}$ Припустімо, що система векторів $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n$ творить базис простору $\mathbb{V}^n$. Тоді будь-яка система з $(n+1)$ вектора $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n,\overline{x}$ — лінійно залежна, тобто існують такі числа $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, не всі рівні нулеві, такі, що

$$\alpha_0\overline{x}+\alpha_1\overline{a}_1+\ldots+\alpha_n\overline{a}_n=\overline{0},$$

причому $\alpha_0\neq 0$, інакше система $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n$ була б лінійно залежною.

Отже,

$$\overline{x}=-\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_1\overline{x}_1+\ldots+\alpha_n\overline{x}_n).$$

Тобто вектор $\overline{x}$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Припустімо, що будь-який вектор $\overline{x}\in\mathbb{V}^n$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_i, i=\overline{1,n}$. Тоді система з $(n+1)$ векторів лінійно залежна (див. *Твердження 6.1*). Отже, у просторі $\mathbb{V}^n$ не існує більше, ніж n лінійно незалежних векторів. Вектори $\overline{a}_i, i=\overline{1,n}$, творять за означенням базис. ◄

Якщо $\mathcal{B}=\{\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n\}$ — базис простору, то з *теореми 6.1* і *теореми 5.2* випливає, що для будь-якого вектора $\overline{x}\in\mathbb{V}^n$ існують єдині числа $x_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$, що

$$\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n. \tag{6.1}$$

Співвідношення (6.1) звуть *розкладом вектора $\overline{x}$ за базисом* $\mathcal{B}$. Числа $x_1,\ldots,x_n$ звуть *координатами вектора $\overline{x}$ у базисі* $\mathcal{B}$.

Зауваження 6.1. Враховуючи взаємно однозначну відповідність між вектором і його координатами в базисі $\mathcal{B}$, часто пишуть замість рівності

$$\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n$$

або рівність

$$\overline{x}=\vec{x}(\mathcal{B})=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{Vmatrix},$$

або рівність

$$\overline{x}=(\overleftarrow{x}(\mathcal{B}))^T=(x_1;x_2;\ldots;x_n)^T.$$

Вектори $\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n$ мають у базисі $\{\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n\}$ координати:

$$\vec{e}_1=\begin{Vmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{Vmatrix},\ldots,\vec{e}_n=\begin{Vmatrix}0\\\ldots\\0\\1\end{Vmatrix}.$$

Твердження 6.2. 1. У вибраному базисі $\mathcal{B}$ *рівні вектори* мають однакові координати.
2. Щоб додати два вектори, задані своїми координатами

у базисі $\mathcal{B}$, додають їхні відповідні координати.
3. Щоб помножити вектор, заданий координатами в базисі $\mathcal{B}$, на число, його координати множать на це число.

►1. Нехай

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n,$$
$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + \ldots + y_n\overline{e}_n.$$

З рівності векторів $\overline{x} = \overline{y}$ випливає, що

$$x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n = y_1\overline{e}_1 + \ldots + y_n\overline{e}_n \Rightarrow (x_1 - y_1)\overline{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n) = \overline{0}.$$

З лінійної незалежності системи векторів $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ випливає, що

$$x_1 - y_1 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0.$$

2.

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n) + (y_1\overline{e}_1 + \ldots + y_n\overline{e}_n) =$$
$$= (x_1 + y_1)\overline{e}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\overline{e}_n.$$

3.

$$\lambda\overline{x} = \lambda(x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n) = (\lambda x_1)\overline{e}_1 + \ldots + (\lambda x_n)\overline{e}_n. ◄$$

Приміром, у $\mathbb{V}^3$ при фіксованому базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ матимемо:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \vec{x} = \vec{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{Vmatrix}; \quad \lambda\vec{x} = \lambda \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{Vmatrix}.$$

Зауваження 6.2. Основне значення базису лінійного простору полягає в тому, що лінійні дії над векторами у фіксованому базисі зводяться до лінійних дій над числами — їхніми координатами.

Твердження 6.3. Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли лінійно залежна система їхніх координатних стовпців у фіксованому базисі.

►Рівність нулеві нетривіальної *лінійної комбінації векторів* еквівалентна рівності нулеві нетривіальної лінійної комбінації стовпців їхніх координат.◄

Наслідок 1. Система векторів колінеарна тоді й лише тоді, коли координати її векторів у фіксованому базисі пропорційні (ранг матриці із стовпців з їхніми координатами не перевищує 1). Приміром, система векторів $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ тривимірних векторів колінеарна, якщо

$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}.}$$

Наслідок 2. Система векторів буде компланарною тоді й лише тоді, коли ранг матриці із стовпців з їхніми координатами не перевищує 2.

Вправа 6.3. Вектори $\overline{a}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Vmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{Vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Vmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{Vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Vmatrix}$ та $\overline{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}$ задано в базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Підібрати, якщо це можливо, числа x_1, x_2, x_3 так, що

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{b}.$$

Розв'язання вправи 6.3 див. у *п. 6.6.4.*

6.3.2. Заміна базисів. Розгляньмо два базиси $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ та $\mathcal{B}' = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$ лінійного простору $\mathbb{V}^3$. Розкладімо вектори базису $\mathcal{B}'$ за базисом $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} \overline{e}_1' = t_{11}\overline{e}_1 + t_{21}\overline{e}_2 + t_{31}\overline{e}_3, \\ \overline{e}_2' = t_{12}\overline{e}_1 + t_{22}\overline{e}_2 + t_{32}\overline{e}_3, \\ \overline{e}_3' = t_{13}\overline{e}_1 + t_{23}\overline{e}_2 + t_{33}\overline{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} \overline{e}_1' & \overline{e}_2' & \overline{e}_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix}.$$

Матрицю

$$\begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} \overset{\text{den}}{=} T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

звуть *матрицею переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису* $\mathcal{B}'$. Її стовпці є координатними стовпцями векторів базису $\mathcal{B}'$ за базисом $\mathcal{B}$.

Твердження 6.4. 1. Матриця $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ — *невироджена*.

2. Якщо $\vec{x} = \|x_i\|_3$ та $\vec{x}' = \|x_i'\|_3$ — стовпці координат вектора $\overline{x}$ у базисах $\mathcal{B}$ та $\mathcal{B}'$ відповідно, то

$$\vec{x} = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\vec{x}' \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_2' \end{Vmatrix}.$$

3. *Обернена до матриці* $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ матриця є матрицею зворотного переходу від базису $\mathcal{B}'$ до базису $\mathcal{B}$.

Доведення твердження 6.4. див. у *п. 6.6.5.*

Про орієнтацію базисів див. у *п. 6.6.6.*

6.4. Прямокутна Декартова система координат (ПДСК). Координати точки

6.4.1. Система координат на прямій. Нехай задано довільну пряму L. Виберімо на ній дві різні точки A та B. Напрямлений відрізок $\overline{AB}$ задає один із двох можливих напрямів на прямій — орієнтує пряму і визначає вектор $\overline{s} = \overline{AB}$. Вважатимемо заданий напрям додатним і позначмо його стрілкою (рис. 6.1).

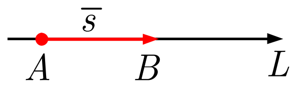

Рис. 6.1

Пряму L, на якій задано *додатний напрям* (орієнтацію), звуть *віссю*, а вектор $\overline{s}$ — *напрямним вектором осі*.

Зафіксуймо на прямій точку O — початок координат — і виберімо за базис ненульовий одиничний вектор $\overline{i} = \overline{OE}$ (рис. 6.2). У цьому разі кажуть, що на прямій задано *систему координат* Oi. Разом з тим, пряма зорієнтована вектором $\overline{i}$ і є віссю.

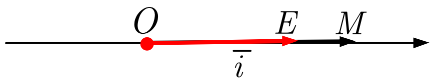

Рис. 6.2

Розгляньмо довільну точку M на прямій і розкладімо вектор $\overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}\}$:

$$\overline{OM} = x\overline{i}.$$

Означення 6.4. *Координатою точки* M звуть координату x вектора $\overline{OM}$ у базисі $\{\overline{i}\}$ і пишуть

$$\boxed{M = M(x).}$$

Ставлячи у відповідність кожній точці її координату, дістаємо взаємно однозначну відповідність між всіма точками прямої і множиною дійсних чисел. Пряму, на якій задано деяку систему координат, звуть *числовою віссю* Ox. Початкова точка O, лише вона, має координату нуль; на одній із двох півосей, на які точка O розбиває числову вісь, координати всіх точок додатні, на другій — від'ємні: маємо *додатну* та *від'ємну* півосі (рис. 6.3).

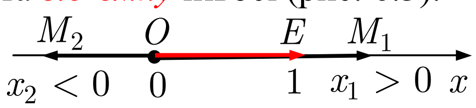

Рис. 6.3

6.4.2. Декартова система координат на площині. Розгляньмо два ненульових вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Відкладімо їх від спільного початку — точки O: $\overline{a} = \overline{OA}, \overline{b} = \overline{OB}$ (рис. 6.4).

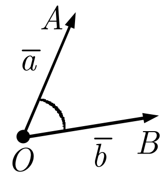

Рис. 6.4

Кутом між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ вважають величину кута AOB:

$$\angle AOB \overset{\text{den}}{=} (\widehat{\overline{a},\overline{b}}).$$

Очевидно, що

$$0 \le (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) \le \pi.$$

Якщо один або обидва вектори нульові, то кут між ними не визначають.

Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0; між протилежно напрямленими дорівнює π. Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то їх звуть *перпендикулярними*.

Під кутом між вектором і віссю розуміють кут між вектором і напрямним вектором осі.

Зафіксуймо на площині (у просторі) точку O і розгляньмо довільну точку M.

Означення 6.5. *Радіусом-вектором* точки M (щодо точки O) звуть вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ (рис. 6.5).

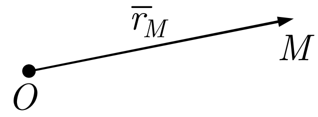

Рис. 6.5

Зауваження 6.3. Якщо на площині вибрано деякий базис, то точці M можна поставити у відповідність упорядковану пару — координати її радіуса-вектора.

Виберімо за базис векторів площини пару перпендикулярних одиничних векторів (рис 6.6):

$$\overline{i} = \overline{OE_1} \text{ та } \overline{j} = \overline{OE_2}.$$

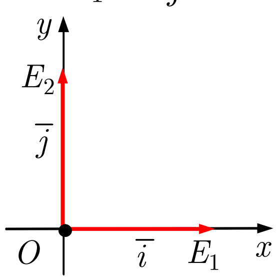

Рис. 6.6

У цьому разі кажуть, що на площині задано прямокутну *Декартову систему координат* (ПДСК) Oij. Точку O звуть *початком координат*; осі, що проходять через початок координат із напрямними векторами $\overline{i}$ та $\overline{j}$, звуть *осями координат*. Першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy. Площину, на якій задано систему координат, звуть *координатною площиною* Oxy.

Розгляньмо довільну точку M на площині і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ (рис. 6.7):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} = x\overline{i} + y\overline{j}.$$

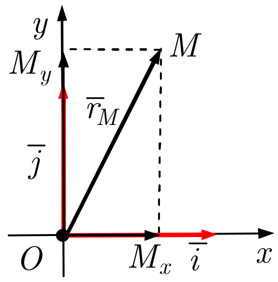

Рис. 6.7

Означення 6.6. *Координатами* точки M у прямокутній Декартовій системі координат звуть координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ і пишуть

$$\boxed{M = M(x; y).}$$

Першу координату звуть *абсцисою*, другу — *ординатою*.

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які звуть *координатними чвертями* ($\Leftrightarrow$ *квадрантами*). Кожній чверті відповідає певна комбінація знаків координат (рис. 6.8).

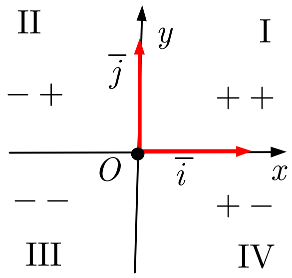

Рис. 6.8

Про загальну Декартову систему координат на площині див. у *п. 6.6.7.*

6.4.3. Прямокутна Декартова система координат у просторі. Зафіксуймо у просторі точку O і виберімо за базис трійку взаємно перпендикулярних одиничних векторів (рис. 6.9):

$$\overline{i} = \overline{OE_1},\ \overline{j} = \overline{OE_2} \text{ та } \overline{k} = \overline{OE_3}.$$

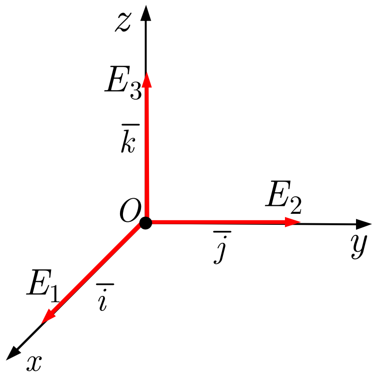

Рис. 6.9

У цьому разі кажуть, що у просторі задано *прямокутну Декартову систему координат* $Oijk$ ($\Leftrightarrow$ПДСК $Oxyz$). Точку O звуть *початком координат*; осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$ звуть *осями координат:* першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy, третю — *віссю аплікат* Oz. Площини, що проходять через вісі координат, звуть *координатними площинами*, відповідно Oxy, Oxz та Oyz.

Координатні площини розбивають простір на вісім частин — *октантів* (рис. 6.10), які нумерують як на рис 6.10 (у першому — всі три координати додатні,...).

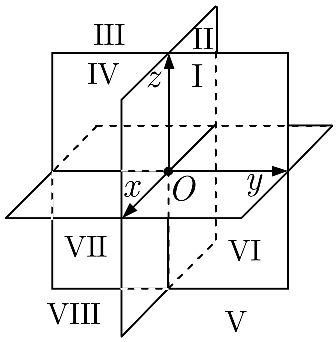

Рис. 6.10

Розгляньмо довільну точку M у просторі і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ (рис. 6.11):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Означення 6.7. *Координатами* точки M у прямокутній Декартовій системі координат $Oijk$ звуть координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і пишуть

$$\boxed{M = M(x; y; z).}$$

Першу координату звуть *абсцисою*, другу — *ординатою*, третю — *аплікатою*.

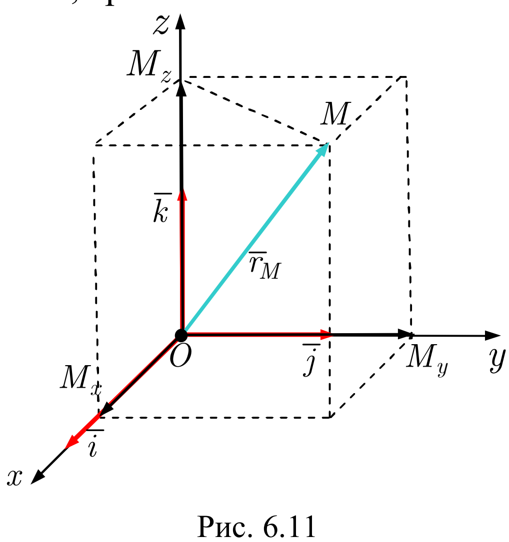

Рис. 6.11

Про загальну Декартову систему координат у просторі див. у *п. 6.6.8.*

6.5. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

6.5.1. Координати вектора. Нехай у ПДСК $Oxyz$ задано дві точки $A(x_A; y_A; z_A)$ та $B(x_B; y_B; z_B)$. З означення координат точки та твердження 6.2 маємо (рис. 6.12):

$$\overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = \begin{Vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{Vmatrix}.$$

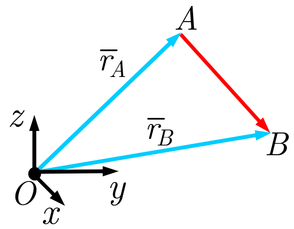

Рис. 6.12

Висновок. Щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти координати початку.

Це ж правило правдиве й у просторах вимірності 1 та 2 — на прямій і на площині.

6.5.2. Поділ відрізка в заданому відношенні. Кажуть, що точка M поділяє відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda \neq -1$, якщо виконано співвідношення

$$|A_1M| = \lambda |MA_2|.$$

Нехай точка $M(x; y; z)$ поділяє відрізок A_1A_2, який з'єднує точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ та $A_2(x_2; y_2; z_2)$, у відношенні λ (рис. 6.13). Розгляньмо вектори $\overline{A_1M}$ та $\overline{MA_2}$. Точка M поділяє відрізок A_1A_2 у відношенні λ, якщо $\overline{A_1M} = \lambda \overline{MA_2}$.

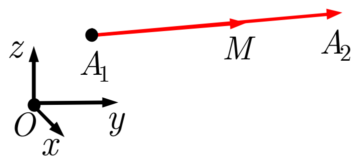

Рис. 6.13

Але

$$\overline{A_1M} = \begin{Vmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{Vmatrix}; \quad \overline{MA_2} = \begin{Vmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{Vmatrix},$$

тобто

$$\begin{Vmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda(x_2 - x) \\ \lambda(y_2 - y) \\ \lambda(z_2 - z) \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = (x_1 + \lambda x_2); \\ (1+\lambda)y = (y_1 + \lambda y_2); \\ (1+\lambda)z = (z_1 + \lambda z_2). \end{cases}$$

Якщо $\lambda = -1$, то $A_1M + MA_2 = 0$, тобто $A_1A_2 = 0$ (маємо випадок виродженого відрізка — немає що ділити).

Отже, для ненульового відрізка при $\lambda \neq -1$ маємо

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.} \qquad (6.2)$$

Зауваження 6.4. 1. Якщо $\lambda = 0$, то це означає, що точки A_1 та M збігаються (рис. 6.14).
2. Якщо $\lambda > 0$, то точка M лежить усередині відрізка A_1A_2 (див. рис. 6.14).
3. Якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить ззовні відрізка A_1A_2 і кажуть, що вона поділяє відрізок зовнішнім чином (див. рис. 6.14).
4. При $\lambda = 1$ точка M є серединою відрізка A_1A_2 (див. рис. 6.14):

$$\boxed{x_M = \frac{x_{A_1} + x_{A_2}}{2}, y_M = \frac{y_{A_1} + y_{A_2}}{2}, z_M = \frac{z_{A_1} + z_{A_2}}{2}.} \qquad (6.3)$$

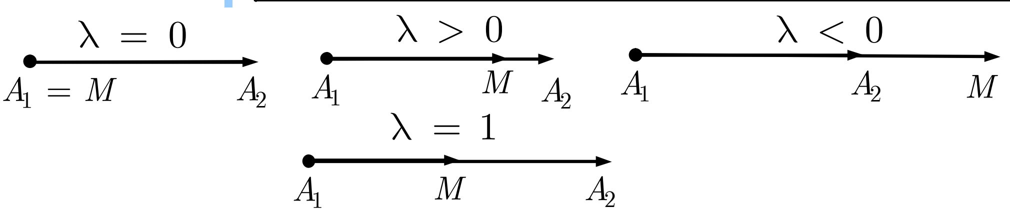

Рис. 6.14

Вправа 6.4. У трикутнику ABC проведено бісектрису CD внутрішнього кута $\angle C$. Виразити вектор $\overline{CD}$ через вектори $\overline{a} = \overline{CA}$ та $\overline{b} = \overline{CB}$.

Розв'язання вправи 6.4 див. у *п. 6.6.9.*

6.5.3. Координати центра мас системи матеріальних точок. Розв'язання цієї задачі базується на двох фізичних припущеннях:

1. Центр мас системи із двох точок M_1 та M_2 з масами m_1 та m_2 розташований на відрізку M_1M_2 і поділяє його у відношенні $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$.

2. Центр мас системи точок $M_1, M_2, ..., M_n$ з масами $m_1, m_2, ..., m_n$ збігається з центром мас системи із двох точок, одна з яких розташована в центрі мас системи точок $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ і має масу $m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}$, а друга — точка M_n з масою m_n.

Усі проміжні викладки проведімо лише для абсциси. Із припущення 1 та формули (6.2) випливає, що абсциса центра мас системи із двох точок

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Припущення 2 дозволяє тепер знайти абсцису центра мас трьох точок:

$$x = \frac{\dfrac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \dfrac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \dfrac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

За допомогою методу математичної індукції можна довести, що координати центра мас системи з n точок знаходять за формулами:

$$\boxed{x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.} \qquad (6.4)$$

6.6. Додаткові відомості

6.6.1. Наслідки з аксіом I — VIII. 1. Існує лише один нульовий вектор.

2. Існує лише один протилежний вектор $(\ominus \overline{v}) = (-1) \odot \overline{v}$.

3. $\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}$ рівняння $\overline{u} \oplus \overline{x} = \overline{v}$ має єдиний розв'язок $\overline{x} = \overline{v} \ominus \overline{u}$.

4. $\forall \overline{v} \in \mathbb{V} : 0 \odot \overline{v} = 0$.

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \odot \overline{0} = \overline{0}$.

6. Сума будь-якої кількості векторів не залежить від порядку доданків і способу розставляння дужок.

6.6.2. Розв'язання вправи 6.1. Перевіримо виконання аксіом I — VIII:

$\overline{x} \oplus \overline{y} = xy \in P$:

$$\mathrm{I}. \overline{x} \oplus \overline{y} = xy = yx = \overline{y} \oplus \overline{x}.$$

$$\mathrm{II}. (\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = xyz = x(yz) = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}).$$

$$\mathrm{III}. \exists \overline{0} = 1 : \overline{x} \oplus \overline{0} = x \cdot 1 = \overline{x}.$$

$$\mathrm{IV}. \exists! (\ominus \overline{x}) = \frac{1}{x} : \overline{x} \oplus (\ominus \overline{x}) = x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \overline{0}.$$

$\alpha \odot \overline{x} = x^{\alpha} \in P$:

$$\mathrm{V}. \alpha \odot (\overline{x} \oplus \overline{y}) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (\alpha \odot \overline{x}) \oplus (\alpha \odot \overline{y});$$

$$\mathrm{VI}. (\alpha + \beta) \odot \overline{x} = x^{\alpha + \beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (\alpha \odot \overline{x}) \oplus (\beta \odot \overline{y});$$

$$\mathrm{VII}. \alpha \odot (\beta \odot \overline{x}) = (x^{\beta})^{\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot \overline{x};$$

$$\mathrm{VIII}. 1 \odot \overline{x} = x^{1} = \overline{x}.$$

Отже, P є лінійним простором. Розглянемо будь-який «ненульовий елемент» цього простору $a \neq 1$.

$$\forall x \in P \, \exists \alpha = \log_a x : x = \alpha \odot a = a^{\log_a x}.$$

6.6.3. Розв'язання вправи 6.2. Справді, утворімо лінійну комбінацію з $(n+1)$-го стовпця $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+1}$:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_{n+1}\vec{a}_{n+1} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 \begin{Vmatrix} \vec{a}_1 \\ \downarrow \end{Vmatrix} + \ldots + x_{n+1} \begin{Vmatrix} \vec{a}_{n+1} \\ \downarrow \end{Vmatrix} = \vec{0}.$$

Це є векторним записом однорідної СЛАР з n рівнянь з $(n+1)$-єю невідомими. Така система має ненульовий розв'язок $\vec{\alpha}$. Отже, існує нетривіальна лінійна комбінація стовпців $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+1}$ з коефіцієнтами $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{n+1} = \alpha_{n+1}$, рівна нульовому стовпцю — система $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n+1}$ — лінійна залежна.

6.6.4. Розв'язання вправи 6.3. Рівність

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{b}$$

є векторною формою запису СЛАР. СЛАР буде сумісною, якщо $\operatorname{rang}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \operatorname{rang}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b})$. За цієї умови будь-який її розв'язок задасть набір значень x_1, x_2, x_3.

6.6.5. Доведення твердження 6.4. 1. Доведімо властивість від супротивного. З рівності $\det T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = 0$ випливає лінійна залежність стовпців матриці $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Ці стовпці є координатними стовпцями векторів $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ в базисі $\mathcal{B}$. Тому із *твердження 6.3* випливає, що система векторів $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ лінійно залежна, що суперечить твердженню.

2. Заміняючи в розкладі вектора $\overline{x}$ за базисом $\mathcal{B}'$

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 = x_1'\overline{e}_1' + x_2'\overline{e}_2' + x_3'\overline{e}_3'$$

вектори $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ їх розкладами за векторами базису $\mathcal{B}$, одержимо:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 = \\ &= x_1'(t_{11}\overline{e}_1 + t_{21}\overline{e}_2 + t_{31}\overline{e}_3) + \\ &+ x_2'(t_{12}\overline{e}_1 + t_{22}\overline{e}_2 + t_{32}\overline{e}_3) + \\ &+ x_3'(t_{13}\overline{e}_1 + t_{23}\overline{e}_2 + t_{33}\overline{e}_3) = \\ &= (x_1't_{11} + x_2't_{12} + x_3't_{13})\overline{e}_1 + \\ &+ (x_1't_{21} + x_2't_{22} + x_3't_{23})\overline{e}_2 + \\ &+ (x_1't_{31} + x_2't_{32} + x_3't_{33})\overline{e}_3. \end{aligned}$$

З єдиності розкладу вектора за базисом маємо:

$$\begin{cases} x_1 = x_1't_{11} + x_2't_{12} + x_3't_{13}, \\ x_2 = x_1't_{21} + x_2't_{22} + x_3't_{23}, \\ x_3 = x_1't_{31} + x_2't_{32} + x_3't_{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\vec{x}'.$$

Зауважмо, що при заміні базису «нові» базисні вектори виражаються через «старі», а з координатами вектора навпаки — «старі» координати виражаються через «нові».

3. Матриця $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ — невироджена, отже, оборотна. Помножуючи обидві частини рівності

$$\left\| \overline{e}_1' \;\; \overline{e}_2' \;\; \overline{e}_3' \right\| = \left\| \overline{e}_1 \;\; \overline{e}_2 \;\; \overline{e}_3 \right\| T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

на матрицю $(T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$ справа, матимемо

$$\left\| \overline{e}_1' \;\; \overline{e}_2' \;\; \overline{e}_3' \right\| (T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \left\| \overline{e}_1 \;\; \overline{e}_2 \;\; \overline{e}_3 \right\|.$$

Отже, матриця $T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}$ є матрицею зворотного переходу від базису $\mathcal{B}'$ до $\mathcal{B}$.

6.6.6. Орієнтація базисів. Розгляньмо два базиси простору $\mathbb{V}^3$: $\mathcal{B}= \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ та $\mathcal{B}'= \{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$. Визначники матриць переходу $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ та $(T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ від одного базису до іншого мають однакові знаки.

Якщо, приміром, вектори двох базисів зв'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= \overline{e}_2, & \overline{e}_1 &= \overline{e}_2', \\ \overline{e}_2' &= \overline{e}_1, & \overline{e}_2 &= \overline{e}_1', \\ \overline{e}_3' &= \overline{e}_3, & \overline{e}_3 &= \overline{e}_3'. \end{aligned}$$

При цьому

$$\det T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \;\; \det T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Якщо циклічно переставити вектори базису, тобто замінити другий вектор першим, третій — другим, а перший — третім, одержимо

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= \overline{e}_2, & \overline{e}_1 &= \overline{e}_3', \\ \overline{e}_2' &= \overline{e}_3, & \overline{e}_2 &= \overline{e}_1', \\ \overline{e}_3' &= \overline{e}_1, & \overline{e}_3 &= \overline{e}_2'; \end{aligned}$$

$$\det T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \;\; \det T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Два базиси звуть *однойменними* (базисами однакової орієнтації), якщо визначник матриці переходу від одного до другого додатний, і *різнойменними* (базисами протилежної орієнтації), якщо визначник матриці переходу від'ємний.

Множина усіх базисів простору розпадається на два неперетинних класи, що містять однойменні базиси.

Якщо один із двох класів базисів простору оголошено додатним (а, отже, всі базиси, які він містить), а другий — від'ємним, то кажуть, що цей простір *орієнтовано*.

Часто базиси одного класу звуть *правими*, а другого — *лівими*.

6.6.7. Загальна Декартова система координат на площині. Виберімо за базис векторів площини пару неколінеарних векторів (рис 6.15):

$$\overline{e}_1 = \overline{OE}_1 \text{ та } \overline{e}_2 = \overline{OE_2}\,.$$

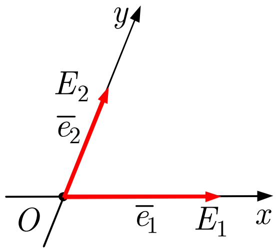

Рис. 6.15

У цьому разі кажуть, що на площині задано *Декартову систему координат* Oe_1e_2. Точку O звуть *початком координат*; осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$, *осями координат*. Першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy. Площину на якій задано систему координат звуть *координатною площиною* Oxy.

Розгляньмо довільну точку M на площині і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ (рис. 6.16):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2.$$

Координатами точки M у Декартовій системі координат звуть координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ (рис. 6.16) і пишуть

$$M = M(x; y).$$

Першу координату звуть *абсцисою*, другу — *ординатою*.

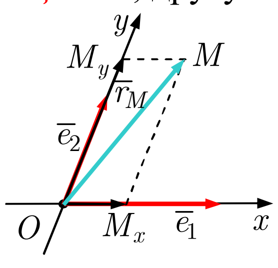

Рис. 6.16

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які звуть *координатними чвертями* ($\Leftrightarrow$*квадрантами*).

6.6.8. Загальна Декартова система координат у просторі. Зафіксуймо у просторі точку O й виберімо за базис трійку некомпланарних векторів:

$$\overline{e}_1 = \overline{OE}_1,\ \overline{e}_2 = \overline{OE_2} \text{ та } \overline{e}_3 = \overline{OE}_3.$$

У цьому разі кажуть, що у просторі задано *Декартову систему координат* $Oe_1e_2e_3$. Точку O звуть *початком координат*; осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$ — *осями координат:* першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy, третю — *віссю аплікат* Oz.

Площини, що проходять через вісі координат, звуть *координатними площинами*, відповідно Oxy, Oxz та Oyz. Координатні площини розбивають простір на вісім частин — *октантів*.

Розгляньмо довільну точку M у просторі і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ (рис. 6.17):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3.$$

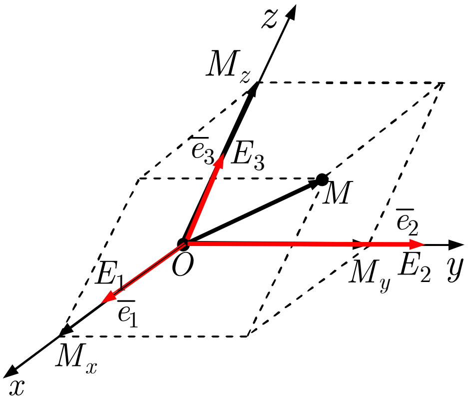

Рис. 6.17

Координатами точки M у Декартовій системі координат $Oe_1e_2e_3$ звуть координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ (див. рис. 6.17) і пишуть

$$M = M(x; y; z).$$

Першу координату звуть *абсцисою*, другу — *ординатою*, третю — *аплікатою*.

6.6.9. Розв'язання вправи 6.4. Відкладімо від точки C одиничні вектори (рис. 6.18)

$$\overline{CM} = \overline{e}_1 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}; \overline{CN} = \overline{e}_2 = \frac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}.$$

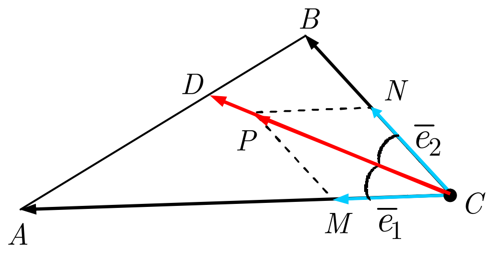

Рис. 6.18

Розгляньмо побудований на векторах $\overline{CM}$ та $\overline{CN}$ як на боках паралелограм $CNPM$. Оскільки $\left|\overline{CM}\right| = \left|\overline{CN}\right| = 1$, то цей паралелограм — ромб. А, отже, його діагональ і є бісектрисою кута $\angle C$. Вектори $\overline{CD}$ та $\overline{CP} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$ — колінеарні, причому $\overline{CP} \neq \overline{0}$. Тому існує таке число x, що

$$\overline{CD} = x\overline{CP} = x\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} + x\frac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}.$$

З іншого боку, точка D поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = \dfrac{|AD|}{|DB|}$. Отже,

$$\overline{CD} = \frac{(\overline{a} + \lambda\overline{b})}{\lambda + 1}.$$

Порівнюючи одержані для вектора $\overline{CD}$ вирази і враховуючи неколінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, маємо:

$$\frac{x}{|\overline{a}|} = \frac{1}{\lambda + 1}, \frac{x}{|\overline{b}|} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}.$$

Звідси

$$\lambda = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|},\ \ \overline{CD} = \frac{\overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b}}{\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} + 1} = \frac{|\overline{a}|\overline{b} + |\overline{b}|\overline{a}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}.$$

Рівність

$$\lambda = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$$

означає, що бісектриса внутрішнього кута $\angle C$ трикутника ABC поділяє бік AB на частини, пропорційні довжинам боків, прилеглих до кута $\angle C$.