Модуль 7. Скалярне множення векторів

Структура модуля

Вступ

1. Ключові слова

Ортогональна проекція точки. Векторна проекція вектора. Проекція ($\Leftrightarrow$ Скалярна проекція) вектора на вісь.

Скалярний добуток векторів. Ортогональні вектори. Ортонормований базис.

Напрямні косинуси.

2. Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 7.1—7.3) та розширеному (розділи 7.1—7.4).

У модулі:

— розглянуто поняття скалярного добутку двох векторів;

— встановлено алгебричні та геометричні властивості скалярного добутку векторів;

— подано деякі геометричні та фізичні застосування скалярного добутку векторів;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

7.1. Проекція вектора на вісь

Ортогональною проекцією точки M простору (площини) на пряму L звуть точку M' перетину прямої із площиною (прямою), що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L (рис. 7.1) ((рис. 7.2)).

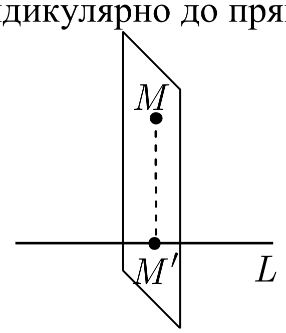

Рис. 7.1

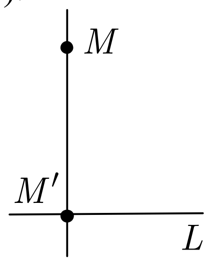

Рис. 7.2

Нехай задано *вісь* L з напрямним вектором $\overline{s}$. Розгляньмо вектор $\overline{a} = \overline{AB}$. Ортогональними проекціями точок A та B на вісь $L(\overline{s})$ є точки A' та B' (рис. 7.3).

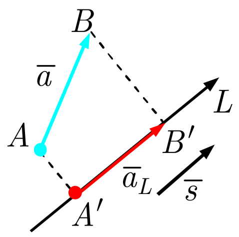

Рис. 7.3

Векторною проекцією вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* $L(\overline{s})$ звуть вектор

$$\overline{a}_L = \overline{A'B'}.$$

Означення 7.1. *Проекцією* (⇔*скалярною проекцію*) вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* L з напрямним вектором $\overline{s}$ звуть число

$$\lambda \overset{\text{den}}{=} \text{pr}_L\, \overline{a} = \text{pr}_{\overline{s}}\, \overline{a},$$

таке, що

$$\overline{A'B'} = \lambda \overline{s}^0, \overline{s}^0 = \frac{\overline{s}}{|\overline{s}|}.$$

Число $\text{pr}_{\overline{s}}\, \overline{a}$ звуть ще проекцією вектора $\overline{a}$ на напрям вектора $\overline{s}$.

Отже,

1) $\text{pr}_{\overline{s}}\, \overline{a} < 0$, якщо $\overline{s} \uparrow\downarrow \overline{A'B'}$;
2) $\text{pr}_{\overline{s}}\, \overline{a} = 0$, якщо $\overline{s} \perp \overline{a}$;
3) $\text{pr}_{\overline{s}}\, \overline{a} > 0$, якщо $\overline{s} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}$.

Твердження 7.1. Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь $L(\overline{s})$ дорівнює добуткові вектора $\overline{a}$ на косинус кута між вектором $\overline{a}$ та віссю:

$$\boxed{\text{pr}_L\, \overline{a} = |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a}, L}) = |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{s}}).} \quad (7.1)$$

Можливі випадки ілюструє рис. 7.4.

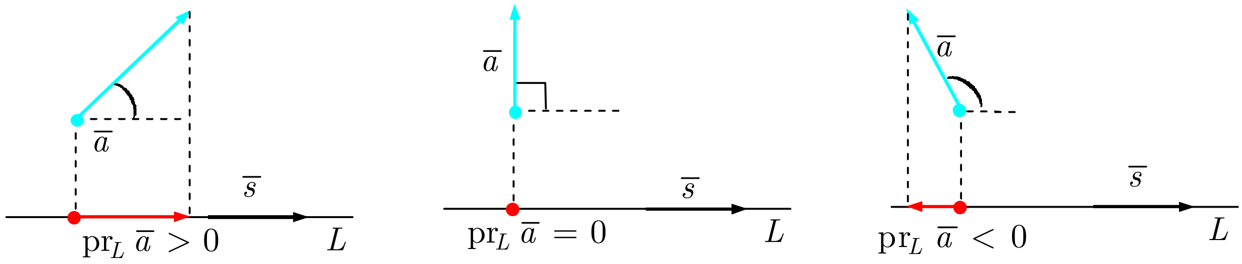

Рис.7.4

Твердження 7.2. 1. *Рівні вектори* мають рівні проекції на одну й ту саму вісь.
2. Проекція суми векторів на довільну вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь.

$$\mathrm{pr}_L(\overline{a}+\overline{b}) = \mathrm{pr}_L\,\overline{a} + \mathrm{pr}_L\,\overline{b}.$$

3. Якщо помножити вектор на число, то проекція вектора на вісь теж помножиться на це число.

$$\mathrm{pr}_L(\lambda\overline{a}) = \lambda\,\mathrm{pr}_L\,\overline{a}.$$

► 1. Справді, якщо $\overline{a} = \overline{b}$, то $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ та $(\widehat{\overline{a},L}) = (\widehat{\overline{b},L})$, звідки з формули (7.1) випливає, що $\mathrm{pr}_L\,\overline{a} = \mathrm{pr}_L\,\overline{b}$.

2. Утворімо ламану OAB з ланками $\overline{OA} = \overline{a}$ та $\overline{AB} = \overline{b}$ (рис. 7.5). Спроектувавши точки O, A, B на вісь $L(\overline{s})$, дістанемо точки O', A', B'.

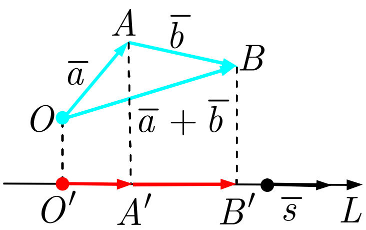

Рис. 7.5

Нехай $\lambda = \mathrm{pr}_L\,\overline{a}$ та $\mu = \mathrm{pr}_L\,\overline{b}$. Тоді $\overline{O'A'} = \lambda\overline{s}^0, \overline{A'B'} = \mu\overline{s}^0$. Звідси

$$\overline{O'B'} = (\lambda+\mu)\overline{s},$$

але ця рівність означає, що $\lambda+\mu$ є проекцією вектора $\overline{OB} = \overline{a}+\overline{b}$. Тобто

$$\mathrm{pr}_L(\overline{a}+\overline{b}) = \mathrm{pr}_L\,\overline{a} + \mathrm{pr}_L\,\overline{b}.$$

3. У разі $\lambda = 0$ властивість очевидна — проекція нуль-вектора дорівнює нулеві.

Нехай вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ утворює з віссю L кут α і нехай $\lambda > 0$. Тоді вектор $\lambda\overline{a}$ утворює з віссю L той самий кут α, а вектор $(-\lambda\overline{a})$ — кут $(\pi-\alpha)$. Тоді із *твердження 7.1* випливає, що

$$\mathrm{pr}_L(\lambda\overline{a}) = \left|\lambda\overline{AB}\right|\cos\alpha = \lambda\left|\overline{AB}\right|\cos\alpha = \lambda\,\mathrm{pr}_L\,\overline{a};$$

$$\mathrm{pr}_L(-\lambda\overline{a}) = \left|-\lambda\overline{AB}\right|\cos(\pi-\alpha) = -\lambda\left|\overline{AB}\right|\cos\alpha = -\lambda\,\mathrm{pr}_L\,\overline{a}. ◄$$

Отже, правдиве

Твердження 7.3. *Лінійним діям над векторами* відповідають ті самі дії над проекціями цих векторів на довільну вісь.

7.2. Скалярне множення двох векторів

7.2.1. Означення скалярного добутку векторів.

Означення 7.2. *Скалярним добутком* двох *векторів* $\overline{a}$ та $\overline{b}$ звуть число, що дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b})\stackrel{\text{def}}{=}\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}).}$$

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то кут не визначений, і скалярний добуток вважають рівним нулеві.

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають ще як $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ звуть *ортогональними*, якщо $(\overline{a},\overline{b})=0$ і позначають $\overline{a}\perp\overline{b}$. Нульовий вектор ортогональний до будь-якого вектора.

З означення випливає, що вектори ортогональні, якщо хоча б один з векторів нульовий або вони перпендикулярні.

З означення 7.2 скалярного добутку і *твердження 7.1* випливає, що

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\operatorname{pr}_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}.}$$

7.2.2. Властивості скалярного добутку. Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ та будь-якого дійсного числа α:

1) $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$ (*симетричність скалярного добутку*);

2) $(\alpha\overline{a},\overline{b})=\alpha(\overline{a},\overline{b})$ (*однорідність скалярного добутку за першим співмножником*);

3) $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c})$ (*лінійність скалярного добутку за першим співмножником*);

4) $(\overline{a},\overline{a})=|\overline{a}|^2\geq 0$ (*невід'ємність скалярного добутку*);

5) $(\overline{a},\overline{a})=0\Leftrightarrow\overline{a}=\overline{0}$ (*додатно-визначеність скалярного добутку*).

Доведення властивостей див. у *п. 7.4.1.*

Зауваження 7.1. 1. Скалярний добуток є лінійним та однорідним і за другим співмножником:

$$(\overline{a},\beta\overline{b})=\beta(\overline{a},\overline{b});$$

$$(\overline{a},\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a},\overline{b})+(\overline{a},\overline{c})$$

$$\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\ \forall\beta\in\mathbb{R}.$$

2. Завдяки властивостям скалярного добутку *лінійні комбінації векторів* можна перемножувати скалярно як лінійні многочлени.

Вправа 7.1. Спростити $(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b})$.

Розв'язання вправи 7.1 див. у *п. 7.4.2.*

Вправа 7.2. Довести, що ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні тоді й лише тоді, коли $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}|$.

Розв'язання вправи 7.1 див. у *п. 7.4.3.*

Зауваження 7.2. 1. Скалярний добуток двох векторів є числом — об'єктом іншої природи ніж множники.
2. Рівність $(\overline{x},\overline{y}) = 0$ виконується не лише для $\overline{x} = \overline{0}$ або $\overline{y} = \overline{0}$, а й для ненульових перпендикулярних векторів.
3. Можна запровадити лише «скалярний квадрат» вектора — $(\overline{x},\overline{x})$. Не існує скалярного добутку трьох і більшого числа векторів.
4. З рівності $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{a},\overline{c})$ не випливає рівність $\overline{b} = \overline{c}$ навіть коли $\overline{a} \neq \overline{0}$. Така рівність можлива й тоді, коли $(\widehat{\overline{a},\overline{b}-\overline{c}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

7.2.3. Скалярний добуток в ортонормованому базисі.

Означення 7.3. *Базис* звуть *ортонормованим*, якщо його вектори попарно ортогональні і мають одиничну довжину.

З означення випливає, що вектори ортонормованого базису $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ справджують таку таблицю множення:

$(\,,\,)$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

Нехай задано *координати векторів* (*розклад вектора за базисом*) $\overline{a}$ та $\overline{b}$ в ортонормованому базисі $\mathcal{B} = \{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} = \vec{a}(\mathcal{B}) = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix},$$

$$\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k} = \vec{b}(\mathcal{B}) = \begin{Vmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Vmatrix}.$$

Завдяки властивостям скалярного добутку маємо

$$(\overline{a},\overline{b}) = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) =$$
$$= a_xb_x(\overline{i},\overline{i}) + a_yb_y(\overline{j},\overline{j}) + a_zb_z(\overline{k},\overline{k}) +$$
$$+(a_xb_y + a_yb_x)(\overline{i},\overline{j}) + (a_xb_z + a_zb_x)(\overline{i},\overline{k}) +$$
$$+(a_yb_z + a_zb_y)(\overline{j},\overline{k}).$$

З означення ортонормованого базису випливає, що

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

Оскільки $(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}|^2$, то

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}.$$

Тоді довжина вектора $\overline{a}$ зі стовпцем координат $\vec{a}$ в ортонормованому базисі

$$\boxed{|\overline{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.} \tag{7.2}$$

Про евклідовий простір — лінійний простір із запровадженим у ньому скалярним добутком див. у *п. 7.4.4.*

7.2.4. Напрямні косинуси вектора. Нехай вектор $\overline{a}$ має координати $\begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$ у базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ (рис. 7.6):

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}.$$

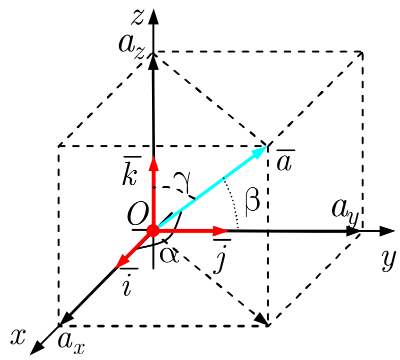

Рис. 7.6

Помножмо цю рівність скалярно послідовно на вектори $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$ і врахуємо означення скалярного добутку та проекції вектора на напрям:

$$(\overline{a},\overline{i}) = |\overline{a}||\overline{i}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}) = |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}) = \mathrm{pr}_{\overline{i}}\,\overline{a} = a_x;$$
$$(\overline{a},\overline{j}) = |\overline{a}||\overline{j}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}) = |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}) = \mathrm{pr}_{\overline{j}}\,\overline{a} = a_y;$$
$$(\overline{a},\overline{k}) = |\overline{a}||\overline{k}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = |\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = \mathrm{pr}_{\overline{k}}\,\overline{a} = a_z.$$

Отже, правдиве

Твердження 7.4. Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють проекціям вектора на координатні осі.

Якщо вектор утворює гострий (тупий) кут з якоюсь віссю, то відповідна координата додатна (від'ємна).

Числа

$$\cos(\widehat{\bar a,\bar i}) = \frac{(\bar a,\bar i)}{|\bar a|} = \frac{a_x}{|\bar a|} \overset{\text{den}}{=} \cos\alpha,$$

$$\cos(\widehat{\bar a,\bar j}) = \frac{(\bar a,\bar j)}{|\bar a|} = \frac{a_y}{|\bar a|} \overset{\text{den}}{=} \cos\beta,$$

$$\cos(\widehat{\bar a,\bar k}) = \frac{(\bar a,\bar k)}{|\bar a|} = \frac{a_z}{|\bar a|} \overset{\text{den}}{=} \cos\gamma.$$

звуть *напрямними косинусами* вектора $\bar a$.

Якщо $\bar a = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$, то

$$\bar a^0 = \frac{\bar a}{|\bar a|} = \begin{Vmatrix} \dfrac{a_x}{|\bar a|} \\ \dfrac{a_y}{|\bar a|} \\ \dfrac{a_z}{|\bar a|} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи формулу (7.2), одержимо співвідношення

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}{|\bar a|^2} = 1.}$$

7.3. Застосування скалярного добутку

1. **Довжина вектора**

$$\boxed{|\bar a| = \sqrt{(\bar a,\bar a)}.}$$

Зверніть увагу: $\sqrt{(\bar a,\bar a)} \neq \bar a\,!$

2. **Кут між ненульовими векторами** $\bar a$ та $\bar b$:

$$\cos(\widehat{\bar a,\bar b}) = \frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar a||\bar b|};$$

$$\boxed{(\widehat{\bar a,\bar b}) = \arccos\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar a||\bar b|}.}$$

3. **Проекція вектора** $\bar b$ **на напрям вектора** $\bar a$:

$$\boxed{\mathrm{pr}_{\bar a}\,\bar b = \frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar a|}.}$$

4. **Критерій перпендикулярності.** Скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулеві тоді й лише тоді, коли вектори перпендикулярні (кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{2}$) :

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{\pi}{2} \quad (\overline{a},\overline{b} \neq \overline{0}).}$$

5. **Робота сталої сили.** Нехай матеріальна точка переміщується прямолінійно з положення A в положення B під дією сталої сили $\overline{F}$, що утворює кут φ з переміщенням $\overline{s} = \overline{AB}$ (рис. 7.7).

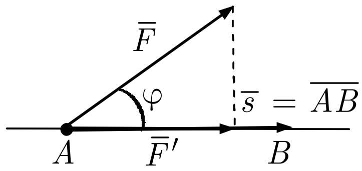

Рис. 7.7

Роботу сили $\overline{F}$ при переміщенні $\overline{s}$ обчислюють за формулою:

$$\boxed{A = \left|\overline{F}\right| \cos\varphi \cdot |\overline{s}| = (\overline{F},\overline{s}).}$$

7.4. Додаткові відомості

7.4.1. Доведення властивостей скалярного добутку. 1) Випливає з означення скалярного добутку векторів та парності косинуса;

2) нехай $\alpha > 0$, тоді

$$\alpha(\overline{a},\overline{b}) = \alpha|\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}});$$

$$(\alpha\overline{a},\overline{b}) = |\alpha||\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\alpha\overline{a},\overline{b}}) = \alpha|\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}),$$

оскільки $(\widehat{\lambda\overline{a},\overline{b}}) = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$ при $\lambda > 0$. Так само розглядають випадок $\alpha < 0$.

При $\alpha = 0$ властивість випливає з означення;

3) справді,

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}) = |\overline{c}|\,\mathrm{pr}_{\overline{c}}(\overline{a}+\overline{b}) = |\overline{c}|(\mathrm{pr}_{\overline{c}}\,\overline{a} + \mathrm{pr}_{\overline{c}}\,\overline{b}) =$$

$$= |\overline{c}|\,\mathrm{pr}_{\overline{c}}\,\overline{a} + |\overline{c}|\,\mathrm{pr}_{\overline{c}}\,\overline{b} = (\overline{a},\overline{c}) + (\overline{b},\overline{c});$$

4) справді,

$$(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}|^2\cos 0 = |\overline{a}|^2 \geq 0;$$

5) справді,

$$(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow |\overline{a}| = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}.$$

7.4.2. Розв'язання вправи 7.1. Маємо

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}) = (\overline{a},\overline{a}) + (\overline{b},\overline{a}) - (\overline{a},\overline{b}) - (\overline{b},\overline{b}) \overset{(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})}{=} (\overline{a},\overline{a}) - (\overline{b},\overline{b}) =$$

$$= |\overline{a}|^2 - \left|\overline{b}\right|^2.$$

7.4.3. Розв'язання вправи 7.2. З рівності $|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x},\overline{x})}$ випливає, що

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}+\overline{b})}=\sqrt{(\overline{a}-\overline{b},\overline{a}-\overline{b})}\Leftrightarrow$$
$$(\overline{a},\overline{a})+2(\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{b})=(\overline{a},\overline{a})-2(\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{b})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\overline{a},\overline{b})=0\Leftrightarrow|\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=0,\overline{a}\neq\overline{0},\overline{b}\neq\overline{0}\Leftrightarrow(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\frac{\pi}{2}.$$

7.4.4. Евклідів простір.

Означення 7.4. Лінійний простір $\mathbb{E}$ звуть *евклідовим*, якщо кожній парі векторів $\overline{x},\overline{y}$ з $\mathbb{E}$ поставлено у відповідність дійсне число $(\overline{x},\overline{y})$, яке звуть *скалярним добутком*, що справджує аксіоми:
I. $(\overline{x},\overline{y})=(\overline{y},\overline{x})$ (симетричність).
II. $(\alpha\overline{x},\overline{y})=\alpha(\overline{x},\overline{y})$ (однорідність за першим співмножником).
III. $(\overline{x}+\overline{y},\overline{z})=(\overline{x},\overline{z})+(\overline{y},\overline{z})$ (лінійність за першим співмножником).
IV. $(\overline{x},\overline{x})=|\overline{x}|^2\geq 0$ (невід'ємність).
V. $(\overline{x},\overline{x})=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{0}$ (додатно-визначеність).

Простір $\mathbb{R}^n$ n-вимірних арифметичних векторів стає евклідовим, якщо для векторів

$$\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n,$$
$$\overline{y}=y_1\overline{e}_1+y_2\overline{e}_2+\ldots+y_n\overline{e}_n$$

означити скалярний добуток формулою

$$(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Leftrightarrow(\overline{x},\overline{y})=\overleftarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=\overleftarrow{y}\cdot\overrightarrow{x}.$$

Означення 7.5. *Нормою* ($\Leftrightarrow$*довжиною*) вектора $\overline{x}\in\mathbb{E}$ звуть число
$$\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}\overset{\text{den}}{=}\|\overline{x}\|.$$

Із формули для скалярного добутку одержимо формулу для норми вектора $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$:

$$\|\overline{x}\|=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+\ldots+(x_n)^2}.$$

Запроваджене таким чином поняття норми вектора узагальнює поняття довжини вектора у просторі $\mathbb{R}^3$.

Твердження 7.5. Якщо $\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{E},\lambda\in\mathbb{R}$, то
1) $\|\overline{x}\|\geq 0,\|\overline{x}\|=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{0}$; 2) $\|\lambda\overline{x}\|=|\lambda|\|\overline{x}\|$;
3) $|(\overline{x},\overline{y})|\leq\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|$; 4) $\|\overline{x}+\overline{y}\|\leq\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|$.

► 2) $\|\lambda\overline{x}\|=\sqrt{(\lambda\overline{x},\lambda\overline{x})}=\sqrt{\lambda^2(\overline{x},\overline{x})}=|\lambda|\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}=|\lambda|\|\overline{x}\|$.

3) Якщо $\overline{x}=\overline{0}$, то нерівність виконано. Нехай $\overline{x}\neq\overline{0}$. Якщо $\overline{x},\overline{y}$ — лінійно залежні, тобто $\exists\lambda:\overline{y}=\lambda\overline{x}$, то

$$|(\overline{x}, \lambda\overline{x})| = |\lambda| \|\overline{x}\|^2 ; \|\overline{x}\| \|\lambda\overline{x}\| = |\lambda| \|\overline{x}\|.$$

Нехай тепер, $\overline{x}, \overline{y}$ — лінійно незалежні. Тоді, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha\overline{x} - \beta\overline{y} \neq \overline{0}$, зокрема і для $\alpha = \|\overline{y}\|, \beta = \|\overline{x}\|$. Розглянемо

$$0 < (\|\overline{y}\|\overline{x} - \|\overline{x}\|\overline{y}, \|\overline{y}\|\overline{x} - \|\overline{x}\|\overline{y}) = 2\|\overline{x}\|^2 \|\overline{y}\|^2 - 2\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) < \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|; \qquad (\overline{x}, -\overline{y}) < \|\overline{x}\|\|-\overline{y}\|;$$

$$-(\overline{x}, \overline{y}) < \|\overline{x}\|\|\overline{y}\| \Rightarrow |(\overline{x}, \overline{y})| < \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|.$$

Цю нерівність звуть *нерівністю Коші — Буняковського*.

4) $\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 - (\|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|)^2 =$

$$= (\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}) - (\|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|)^2 = 2((\overline{x}, \overline{y}) - \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|.$$

Цю нерівність звуть *нерівністю трикутника*. ◄

Для ортогональних векторів $\overline{x}$ та $\overline{y}$ правдива «теорема Піфагора»:

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2 .$$

Кутом між ненульовими векторами $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{E}$ звуть число

$$\arccos \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|} \overset{\text{den}}{=} (\widehat{\vec{x}, \vec{y}}).$$

Твердження 7.6. Ненульові ортогональні вектори не колінеарні.

►$(\overline{a}, \overline{b}) = 0, |\overline{a}| \neq 0, |\overline{b}| \neq 0 \Rightarrow (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \overline{a} \nparallel \overline{b}$.◄

Ортогональною проекцією $\overline{y}$ на $\overline{x} \neq \overline{0}$ звуть вектор $\overline{y}_{\overline{x}}$, колінеарний векторові $\overline{x}$, і такий, що $(\overline{y} - \overline{y}_{\overline{x}}) \perp \overline{x}$ (рис. 7.7).

Оскільки $\overline{y}_{\overline{x}} \parallel \overline{x}$, то

$$\exists \alpha \neq 0 : \overline{y}_{\overline{x}} = \alpha\overline{x};$$

$$(\overline{y} - \overline{y}_{\overline{x}}) \perp \overline{x} \Rightarrow$$

$$(\overline{y} - \overline{y}_{\overline{x}}, \overline{x}) = 0; \quad (\overline{y} - \alpha\overline{x}, \overline{x}) = 0;$$

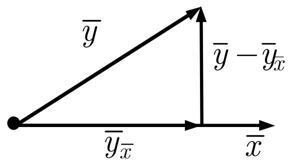

Рис. 7.7

$$\alpha = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{\|\overline{x}\|^2} \Rightarrow \overline{y}_{\overline{x}} = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{\|\overline{x}\|^2}\overline{x} = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{\|\overline{x}\|}\overline{x}^0.$$

Вектор $\overline{y} - \overline{y}_{\overline{x}}$ називають *ортогональною складовою* $\overline{y}$ щодо $\overline{x}$.

Теорема 7.1. Будь-яка ортонормована система з n векторів утворює ортонормований базис простору $\mathbb{E}^n$.

► 1. Доведімо лінійну незалежність системи. Помножмо рівність

$$\lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{x}_n = 0$$

скалярно на $\overline{x}_j, j = \overline{1, n}$. Враховуючи попарну ортогональність векторів, одержимо:

$$\lambda_j(\overline{x}_j, \overline{x}_j) = 0, j = \overline{1, n}.$$

Оскільки $(\overline{x}_j, \overline{x}_j) > 0$, то $\lambda_j = 0, j = \overline{1,n}$, що й означає лінійну незалежність системи векторів $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$.

А, отже, за означенням вона творить базис n вимірного простору $\mathbb{E}^n$. ◀

Виявляється, що будь-яку лінійно незалежну систему з n векторів можна перетворити на ортонормований базис евклідового простору $\mathbb{E}^n$.