Модуль 8. Векторне множення векторів

Структура модуля

Вступ

1. Ключові слова

Ліва (права) трійка векторів. Орієнтований паралелограм. Додатна орієнтація. Від'ємна орієнтація. Векторний добуток двох векторів.

Мішаний добуток трьох векторів.

2. Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 8.1—8.4) та розширеному (розділи 8.1—8.5).

У модулі:

— розглянуто і вивчено векторний, мішаний та подвійний векторний добутки векторів;

— вказано основні геометричні та фізичні застосування цих добутків;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

8.1. Векторне множення двох векторів

8.1.1. Геометрична орієнтація в геометричних просторах. Поняття орієнтації прямої, площини, простору не може бути запроваджено лише математичними засобами. Воно вимагає залучення «фізики».

1. Орієнтація на прямій. Приміром, на прямій, зображеній на рисунку горизонтальною лінією, можна відзначити напрям «зліва направо» і назвати його додатним напрямом («додатною орієнтацією»). Однак треба розуміти, що фіксація цього напряму залежить від того, з якого боку дивитись на рисунок — якщо перевернути його «догори ногами», то додатний напрям перейде у від'ємний. На вертикальних прямих за додатний вважають зазвичай напрям знизу догори (рис. 8.1).

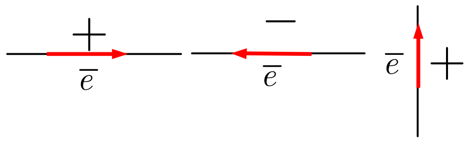

Рис. 8.1

2. Орієнтація на площині. *Орієнтацію* вважаємо *додатною*, якщо «найкоротший поворот» від першого вектора до другого відбувається проти руху годинникової стрілки, у противному разі — *від'ємною* (рис. 8.2).

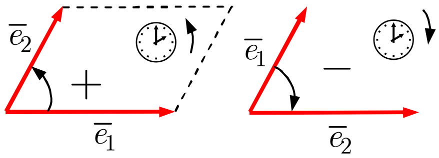

Рис. 8.2

Надалі, розглядаючи системи координат, припускатимемо, що базисні вектори задають додатну орієнтацію.

1. У просторі $\mathbb{V}^1$ — на прямій — фіксують який-небудь *базис* $\{\overline{e}\}, \overline{e} \neq \overline{0}$. Усі базиси $\{\lambda\overline{e}\}, \lambda > 0$ можна вважати, скажімо додатними, а базиси $\{\lambda\overline{e}\}, \lambda < 0$ — від'ємними. Якщо цей простір зображуємо горизонтальної прямою, то додатним напрямом на ній вважатимемо напрям зліва направо (це лише тому, що ми так домовились) (див. рис. 8.1).

2. У просторі $\mathbb{V}^2$ — на площині — базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ задає додатну орієнтацію, якщо найкоротший перехід від $\overline{e}_1$ до $\overline{e}_2$ відбувається проти руху годинникової стрілки, і від'ємну — за рухом годинникової стрілки (знову таки, тому, що ми так домовились) (див. рис. 8.2).

3. У просторі $\mathbb{V}^3$ — базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ задає праву орієнтацією, яку вважатимемо додатною, якщо найкоротший перехід від вектора $\overline{e}_1$ до вектора $\overline{e}_2$, відбувається проти руху годинникової стрілки, коли дивитись на них з кінця вектора $\overline{e}_3$, а від'ємною — ліву, де найкоротший перехід відбувається за рухом годинникової стрілки (рис. 8.3). Вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ правого базису творять *праву трійку*, а век-

тори лівого базису — *ліву орієнтацію* (на рис. 8.4 вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ лівої руки творять ліву трійку, а вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ правої руки творять праву трійку).

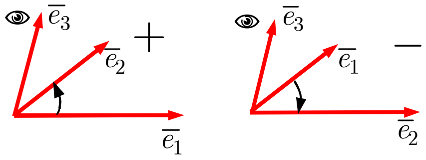

Рис. 8.3

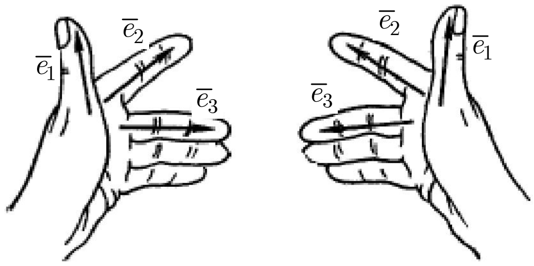

Рис. 8.4

8.1.2 Означення векторного добутку двох векторів.

Означення 8.1. *Векторним добутком векторів* $\overline{a}$ та $\overline{b}$ звуть вектор $\overline{c}$, який:

1) завдовжки дорівнює добуткові довжин векторів на синус кута між ними:

$$|\overline{c}| = |\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}});$$

2) перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

3) напрямлений так, щоб вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ творили праву трійку (рис. 8.5).

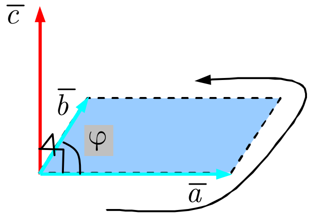

Рис. 8.5

Векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають $[\overline{a}, \overline{b}]$ або $\overline{a} \times \overline{b}$. Векторний добуток *колінеарних векторів* вважають рівним нульовому векторові.

Зауваження 8.1. Векторний добуток $[\overline{a}, \overline{b}]$ неколінеарних векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярний до площини, що визначається векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

8.1.3. Властивості векторного добутку. 1. Довжина вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$ (див. рис. 8.5).

2. Критерій колінеарності векторів. Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору:

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}.}$$

Для будь-яких трьох векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ і числа $\lambda \in \mathbb{R}$:

3) $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$ (*антикомутативність векторного добутку*);

4) $[\lambda\overline{a}, \overline{b}] = \lambda[\overline{a}, \overline{b}]$ (*однорідність векторного добутку*);

5) $[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}]=[\overline{a},\overline{c}]+[\overline{b},\overline{c}]$ (*лінійність векторного добутку*).

Доведення властивостей див. у *п. 8.5.1.*

З властивостей 4), 5) та 3) випливають однорідність та лінійність за другим множником:

$$[\overline{a},\lambda\overline{b}]=-[\lambda\overline{b},\overline{a}]=-\lambda[\overline{b},\overline{a}]=$$
$$=\lambda[\overline{a},\overline{b}];$$
$$[\overline{a},\overline{b}+\overline{c}]=-[\overline{b}+\overline{c},\overline{a}]=-[\overline{b},\overline{a}]-[\overline{c},\overline{a}]=$$
$$=[\overline{a},\overline{b}]+[\overline{a},\overline{c}].$$

Зауваження 8.2. 1. На відміну від скалярного добутку векторів векторний добуток — антикомутативний.
2. Рівняння $[\overline{a},\overline{x}]=\overline{b},\overline{a}\neq\overline{0}$,— або не має розв'язків, або має їх нескінченно багато. А рівняння $[\overline{a},\overline{x}]=\overline{a}$ розв'язків не має.
3. Рівність $[\overline{x},\overline{y}]=\overline{0}$ виконується не лише для нульових векторів, а й для ненульових колінеарних векторів.
4. Оскільки $[\overline{a},\overline{a}]=\overline{0}$, то векторний степінь не розглядають.
5. Векторний добуток, взагалі кажучи, не асоціативний, тобто
$$[[\overline{x},\overline{y}],\overline{z}]\neq[\overline{x},[\overline{y},\overline{z}]].$$

Вправа 8.1. Спростити вираз $[\overline{a}-\overline{b},\overline{a}+\overline{b}]$.

Розв'язання вправи 8.1 див. у *п. 8.5.2.*

8.1.4. Векторний добуток в ортонормованому базисі. Нехай задано правий *ортонормований базис* $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$. Із властивостей векторного добутку випливає, що «таблиця векторного множення» координатних ортів виглядає наступним чином (першим вибирається рядок):

$[,]$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	$\overline{0}$	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	$\overline{0}$	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	$\overline{0}$

Нехай задано вектори

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k} \text{ та } \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}.$$

Перемножмо їх векторно, враховуючи властивості векторного добутку та ортонормованість базису:

$$[\overline{a},\overline{b}] = [a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}] =$$

$$= a_xb_x[\overline{i},\overline{i}] + a_xb_y[\overline{i},\overline{j}] + a_xb_z[\overline{i},\overline{k}] +$$

$$+ a_yb_x[\overline{j},\overline{i}] + a_yb_y[\overline{j},\overline{j}] + a_yb_z[\overline{j},\overline{k}] +$$

$$+ a_zb_x[\overline{k},\overline{i}] + a_zb_y[\overline{k},\overline{j}] + a_zb_z[\overline{k},\overline{k}] =$$

$$= \overline{0} + a_xb_y\overline{k} - a_xb_z\overline{j} - a_yb_x\overline{k} + \overline{0} + a_yb_z\overline{i} + a_zb_x\overline{j} - a_zb_y\overline{i} + \overline{0} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\overline{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\overline{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\overline{k}.$$

Далі врахуємо вирази для визначників 2-го порядку та означення *визначника*:

$$\boxed{[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.}$$

8.2. Застосування векторного добутку

1. Знаходження площі паралелограма та трикутника. Із властивості 1 випливає, що площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$

$$\boxed{S_{\square} = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|,}$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, дорівнює половині довжини векторного добутку:

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|.}$$

Висоту паралелограма та трикутника, опущену на бік, утворений вектором $\overline{a}$, можна знайти за формулою:

$$\boxed{h = \left|\mathrm{pr}_{[\overline{a},\overline{b}]}\,\overline{b}\right| = \frac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{|\overline{a}|}.}$$

Розгляньмо два неколінеарних вектори на площині Oxy :

$$\overline{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \end{Vmatrix} \text{ та } \overline{b} = \begin{Vmatrix} b_x \\ b_y \end{Vmatrix}.$$

Побудуємо на цих векторах паралелограм. «Плоскі» вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ мають в ортонормованому базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ координати:

$$\left\|\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{matrix}\right\| \text{ та } \left\|\begin{matrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{matrix}\right\|.$$

Отже, площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, можна знайти за формулою:

$$S_{\square} = \left\| \begin{vmatrix} a_y & 0 \\ b_y & 0 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ b_x & 0 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k} \right| = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k} \right| = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right|.$$

2. Швидкість точки обертового тіла. Нехай деяке тіло обертається навколо нерухомої точки O з кутовою швидкістю $\overline{\omega}$. У будь-який момент вектор $\overline{\omega}$ збігається за напрямом з миттєвою віссю обертання L (рис. 8.6). Миттєва лінійна швидкість $\overline{v}$ довільної точки M тіла, що розташована не на осі L, визначається вектором

$$\overline{v} = [\overline{\omega}, \overline{OM}],$$

де O — деяка нерухома точка осі.

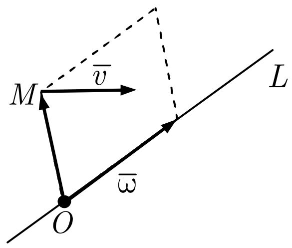

Рис. 8.6

3. Момент інерції сили щодо точки. Нехай $\overline{F} = \overline{AB}$ — вектор сили, прикладеної до точки A (рис. 8.7). *Моментом* $\overline{M}$ *сили* $\overline{F}$ *щодо точки* O звуть вектор

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = [\overline{OA}, \overline{F}].$$

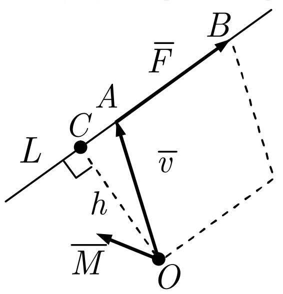

Рис. 8.7

Довжина моменту $\left|\overline{M}\right|$ не залежить від точки A прикладання сили $\overline{F}$ на її лінії дії L. Справді,

$$\left|\overline{M}\right| = \left|[\overline{OA}, \overline{F}]\right| = \left|\overline{F}\right| h,$$

де $h = OC$ — перпендикуляр до L. Величина h від точки A не залежить.

4. Напрям поширення електромагнітних хвиль. В однорідному ізотропному середовищі поширення електромагнітної хвилі визначається вектором

$$\overline{v} = [\overline{E}, \overline{H}],$$

де $\overline{E}$ та $\overline{H}$ — вектори електричної та магнітної напруженості відповідно. Крім того, вектор густини $\overline{P}$ потоку енергії (вектор Пойтинґа), що переноситься полем, означують за формулою

$$\overline{P} = \frac{c}{4\pi}[\overline{E}, \overline{H}] = \frac{c}{4\pi}\overline{v},$$

де c — швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі.

5. Сила, що діє на провідник зі струмом. Відомо, що магнітне поле діє як на окремі рухомі заряди, так і на провідники з електричним струмом. Встановлено, що сила $\overline{F}$, з якою однорідне магнітне поле діє на прямолінійний провідник завдовжки l зі струмом $\overline{I}$, визначається законом

$$\overline{F} = l[\overline{I}, \overline{B}],$$

де $\overline{B}$ — вектор магнітної індукції, що характеризує силовий вплив магнітного поля.

Про справжні вектори і псевдовектори див. у *п. 8.5.3.*

8.3. Мішаний добуток трьох векторів

8.3.1. Означення мішаного добутку. У просторі $\mathbb{V}^3$ кожна трійка некомпланарних векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$, прикладених до однієї точки, визначає паралелепіпед (рис. 8.8), ребрами якого є ці вектори.

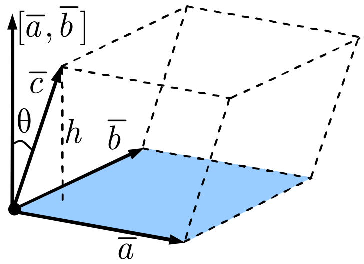

Рис. 8.8

Якщо приписати об’єму цього паралелепіпеду знак «плюс», коли трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ права, і знак «мінус», коли вона ліва, то такий паралелепіпед звуть *орієнтованим*.

Означення 8.2. *Мішаним* ($\Leftrightarrow$ *векторно-скалярним*) *добутком векторів* $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ звуть число — *скалярний добуток* векторного добутку векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$:

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) \overset{\text{den}}{=} (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}).$$

Про подвійний векторний добуток (векторно-векторний добуток) див. у *п. 8.5.4.*

8.3.2. Властивості мішаного добутку. 1. Мішаний добуток $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ дорівнює об’єму орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$.

2. Критерій *компланарності* (*компланарні вектори*). Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ дорівнює нулеві, якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ — компланарні.

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c} - \text{ компланарні.}}$$

Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$:

3) у мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями:

$$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]),$$

що дозволяє позначати мішаний добуток як $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$;

4) циклічне переставляння співмножників не змінює мішаного добутку:

$$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = ([\overline{c},\overline{a}],\overline{b}) = ([\overline{b},\overline{c}],\overline{a});$$

5) переставляння двох співмножників змінює знак мішаного добутку:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b});$$

6) мішаний добуток лінійний за будь-яким множником, приміром,

$$(\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}) = \alpha(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c}) + \beta(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}).$$

► 1. Позначмо $\overline{z}_0$ орт вектора $[\overline{a},\overline{b}]$. З означення 8.1 випливає, що

$$[\overline{a},\overline{b}] = \big|[\overline{a},\overline{b}]\big|\overline{z}_0 = S\overline{z}_0, \tag{8.1}$$

де S — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{z}_0$ творять праву трійку.

Помножмо скалярно рівність (8.1) на вектор $\overline{c}$:

$$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = S(\overline{z}_0,\overline{c}) = S\,|c|\cos\theta,\ \ \theta = \widehat{([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})}.$$

Якщо $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, то вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ творять праву трійку.

Якщо $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ творять ліву трійку.

Оскільки

$$|c|\cos\theta = \operatorname{pr}_{\overline{z}_0}\overline{c} = \pm h,$$

де h — висота паралелепіпеда, то

1) якщо $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — права трійка, то $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = Sh = V > 0$;

2) якщо $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ — ліва трійка, то $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -Sh = -V < 0$.

2. Якщо хоча б один з векторів нульовий, то властивість очевидна.

Нехай тепер жоден з векторів-співмножників не нульовий. Тоді $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$, коли $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (а, отже, вектор $\overline{c}$ лежить у площині векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$) або $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$, (а, отже, вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — колінеарні, тобто вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ — компланарні). ◄

Доведення властивостей 3)—6) див. у *п. 8.5.5.* Доведення властивостей лінійності та однорідності векторного добутку див. у *п. 8.5.6.*

8.3.3. Мішаний добуток в ортонормованому базисі. Нехай задано вектори

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k} \text{ та } \overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}.$$

Знайдімо їх мішаний добуток, використовуючи вираз через координати векторів для векторного та скалярного добутків:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},b],\overline{c}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k}, c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$$

8.4. Застосування мішаного добутку

1. Знаходження об'єму паралелепіпеда $V_{\text{пар}}$ та **трикутної піраміди** $V_{\text{пір}}$, побудованих на некомпланарних векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$:

$$\boxed{V_{\text{пар}} = \left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.}$$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$, можна знайти за формулою

$$\boxed{V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.}$$

Висоту паралелепіпеда та трикутної піраміди на грань, утворену векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$, можна знайти за формулою:

$$\boxed{h = \left|\operatorname{pr}_{[\overline{a},\overline{b}]}\overline{c}\right| = \frac{\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|}{\left|[a,\overline{b}]\right|}.}$$

2. Встановлення взаємної орієнтації і компланарності векторів. Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$:

1) якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ творять праву трійку;

2) якщо $(\overline{a},b,\overline{c}) < 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ творять ліву трійку;

3) якщо $(\overline{a},b,\overline{c}) = 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарні.

8.5. Додаткові відомості

8.5.1. Доведення властивостей векторного добутку. 1. Це випливає з означення векторного добутку та формули для обчислення площі паралелограма.

2. Справді, якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то або $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ $(\varphi = 0)$, або $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ $(\varphi = \pi)$. В обох випадках

$$\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \sin\varphi = 0 \Rightarrow \left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = 0 \Leftrightarrow [\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}.$$

Якщо $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$, то

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = 0 \Leftrightarrow |\overline{a}||b|\sin\varphi = 0.$$

Оскільки вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ ненульові, то

$$\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}.$$

3. Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — колінеарні, це очевидно.

Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — неколінеарні, то властивість випливає зі зміни орієнтації трійки векторів (рис. 8.9).

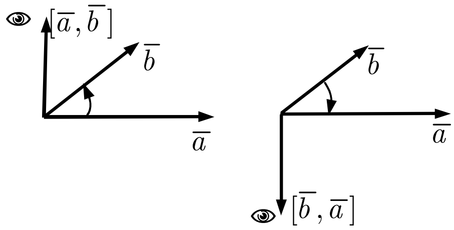

Рис. 8.9

8.5.2. Розв'язання вправи 8.1. Маємо

$$[\overline{a}-\overline{b},\overline{a}+\overline{b}] = [\overline{a},\overline{a}] + [\overline{a},\overline{b}] - [\overline{b},\overline{a}] - [\overline{b},\overline{b}] \overset{[\overline{b},\overline{a}]=-[\overline{a},\overline{b}]}{=} 2[\overline{a},\overline{b}].$$

8.5.3. Справжні вектори і псевдовектори. Існують вектори, напрям яких залежить від орієнтації базису простору. Причому, зміна орієнтації базису приводить до заміни вектора на протилежний. Такі вектори звуть *псевдовекторами* (аксіальними векторами) на відміну від «справжніх» векторів, напрям яких не залежить від орієнтації базису. Приміром, під час поступального руху твердого тіла вектор швидкості за своїм фізичним змістом не залежить від вибору орієнтації базису і тому є справжнім вектором. Вектор кутової швидкості $\overline{\omega}$ під час обертального руху тіла, який відкладають від осі обертання і довжина якого дорівнює значенню швидкості, є псевдовектором, оскільки його напрям залежить від орієнтації базису (рис. 8.10).

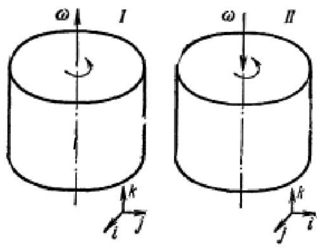

Рис. 8.10

З означення векторного добутку випливає, що векторний добуток двох справжніх векторів є псевдовектором. Отже, момент сили — це псевдовектор. Векторний добуток справжнього вектора на псевдовектор є справжнім вектором, а двох псевдовекторів — псевдовектором. Справжній вектор $\overline{v}$ лінійної швидкості будьякої точки M під час обертального руху зв'язаний із псевдовектором $\overline{\omega}$ формулою $\overline{v} = [\overline{\omega}, \overline{OM}]$, якщо точка O довільно вибрана на осі обертання.

Так само, разом зі «справжніми» скалярами вирізняють псевдоскаляри — скалярні величини, що після заміні орієнтації базису множаться на (-1). Можна перевірити, що скалярний добуток вектора та псевдовектора є псевдоскаляром.

8.5.4. Подвійний векторний добуток трьох векторів.

Означення 8.3. *Подвійним векторним добутком* векторів $\overline{a}, \overline{b}$ т $\overline{c}$ звуть вектор $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$.

Знайдімо простіший вираз для подвійного векторного добутку.

Якщо вектори $\overline{b}$ та $\overline{c}$ колінеарні, то $[\overline{b}, \overline{c}] = \overline{0} \Rightarrow [\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \overline{0}$.

Нехай вектори $\overline{b}$ та $\overline{c}$ не колінеарні. Оскільки вектор $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] \perp [\overline{b}, \overline{c}] \neq \overline{0}$, то він компланарний з векторами $\overline{b}$ та $\overline{c}$. Отже, існують такі β та γ:

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}.$$

Оскільки вектор $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$ перпендикулярний до вектора $\overline{a}$, то, помноживши цю рівність скалярно на $\overline{a}$, одержимо:

$$0 = \beta(\overline{b}, \overline{a}) + \gamma(\overline{c}, \overline{a}).$$

Нехай вектор $\overline{a}$ не ортогональний одночасно до векторів $\overline{b}$ та $\overline{c}$ (бо інакше подвійний векторний добуток дорівнює нулеві).

Отже,

$$\exists\mu : \beta = \mu(\overline{c}, \overline{a}); \gamma = -\mu(\overline{b}, \overline{a}).$$

Тоді, маємо:

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \mu\overline{b}(\overline{c}, \overline{a}) - \mu\overline{c}(\overline{b}, \overline{a}) = \mu\overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \mu\overline{c}(\overline{a}, \overline{b}).$$

Можна показати, що $\mu = 1$.

Оскільки вектор $[\overline{b}, \overline{c}]$ — ортогональний до векторів $\overline{b}$ та $\overline{c}$, то вектори $\overline{b}, \overline{c}, [\overline{b}, \overline{c}]$ — лінійно незалежні та творять базис у просторі $\mathbb{V}^3$. Ортонормований базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ простору задамо так: $\overline{i} = \overline{b}^0$; вектор $\overline{j}$ — нехай буде компланарний векторам $\overline{b}$ та $\overline{c}$; вектор $\overline{k}$ — виберімо так, щоб трійка $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ була правою.

8.5.5. Доведення властивостей 3)—6) мішаного добутку. 3) Властивість очевидна, якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ — компланарні. Нехай вони некомпланарні. Тоді із симетричності скалярного добутку випливає, що

$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = ([\overline{b}, \overline{c}], \overline{a}).$$

Трійки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ та $\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}$ однойменні (обидві праві або обидві ліві); а з геометричних властивостей випливає, що

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = V = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]).$$

4) Випливає із властивості 1) та симетричності скалярного добутку:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{c},[\overline{a},\overline{b}]) =$$
$$= (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = ([\overline{c},\overline{a}],\overline{b}) = (\overline{b},[\overline{c},\overline{a}]) =$$
$$= (\overline{b},\overline{c},\overline{a}).$$

5) Випливає із властивостей 1), 2) та антикомутативності векторного добутку:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = -([\overline{b},\overline{a}],\overline{c}) =$$
$$= -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b}).$$

6) Випливає із властивості 2) та лінійності та однорідності скалярного добутку:

$$(\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}) = (\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2,[\overline{b},\overline{c}]) = \alpha(\overline{a}_1,[\overline{b},\overline{c}]) + \beta(\overline{a}_2,[\overline{b},\overline{c}]) =$$
$$= \alpha(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c}) + \beta(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}).$$

Лінійність за 2-м та 3-м співмножником випливає із властивості 2) мішаного добутку.

8.5.6. Доведення лінійності та однорідності векторного добутку.

Твердження 8.1.

1. Якщо вектор $\overline{x}$ ортогональний до будь-якого вектора простору, то $\overline{x} = \overline{0}$.
2. Якщо $\forall\overline{y} : (\overline{x}_1,\overline{y}) = (\overline{x}_2,\overline{y})$, то $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$.

► 1. З умови твердження випливає, що й вектор

$$\overline{x} \perp \overline{x} \Leftrightarrow (\overline{x},\overline{x}) = 0.$$

А це й означає, що $\overline{x} = \overline{0}$ (додатновизначеність скалярного добутку).

2. За властивістю скалярного добутку,

$$\forall\overline{y} : (\overline{x}_1,\overline{y}) = (\overline{x}_2,\overline{y}) \Leftrightarrow \forall\overline{y} : (\overline{x}_1 - \overline{x}_2,\overline{y}) = 0.$$

А за першим твердженням теореми

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2. ◄$$

Твердження 8.2.

Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ і будь-яких чисел α та β правдива рівність:

$$[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}] = \alpha[\overline{a},\overline{c}] + \beta[\overline{b},\overline{c}]. \qquad (8.2)$$

►Домножмо скалярно рівність (8.2) на будь-який вектор $\overline{d}$ і скористаємось лінійністю мішаного добутку за 2-м множником і однорідністю та лінійністю скалярного добутку

$$(\overline{d},[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}]) = (\overline{d},\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}) = \alpha(\overline{d},\overline{a},\overline{c}) + \beta(\overline{d},\overline{b},\overline{c}) =$$
$$= \alpha(\overline{d},[\overline{a},\overline{c}]) + \beta(\overline{d},[\overline{b},\overline{c}]) =$$
$$= (\overline{d},\alpha[\overline{a},\overline{c}] + \beta[\overline{b},\overline{c}]), \forall\overline{d}.$$

За *твердженням 8.1*

$$[\alpha\overline{a} + \beta\overline{b},\overline{c}] = \alpha[\overline{a},\overline{c}] + \beta[\overline{b},\overline{c}].$$

При $\beta = 0$ маємо однорідність векторного добутку

$$[\alpha\overline{a}, \overline{c}] = \alpha[\overline{a}, \overline{c}].$$

При $\alpha = \beta = 1$ маємо лінійність векторного добутку:

$$[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]. \blacktriangleleft$$