Модуль 1. Матриці. Дії над матрицями

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Що звуть матрицею розміру $m \times n$?
2. Які матриці звуть квадратними, діагональними, одиничними та нульовими?
3. Які матриці звуть рівними? однакового розміру? узгодженими?
4. Які дії над матрицями (стовпцями, рядками) звуть лінійними?
5. Наведіть означення лінійної комбінації стовпців (рядків).
6. Наведіть означення дій над матрицями.
7. Матриці яких розмірів можна додавати, а яких — перемножувати?
8. Якими властивостями множення матриць відрізняється від множення чисел? Для яких матриць визначені обидва добутки AB та BA? Для яких матриць можлива рівність $AB = BA$?
9. У чому полягає дія транспонування? Чи можуть бути рівними матриці A та A^T?
10. Яку матрицю звуть оборотною?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 1.1.

Знайти матрицю $C = 3A - 4B$ (якщо це можливо) Розв'язати рівняння $A + X = B$, якщо:

1) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

2) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

❍ 1) Матриці A та B однакового розміру, отже, можна знайти матрицю $3A - 4B$ та матрицю $X = B - A$.

$$3A = \begin{Vmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-3) & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -9 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$(-4)B = \begin{Vmatrix} (-4)\cdot 7 & (-4)\cdot 1 & (-4)\cdot 0 \\ (-4)\cdot 0 & (-4)\cdot(-1) & (-4)\cdot 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -28 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \end{Vmatrix};$$

$$3A + (-4)B = \begin{Vmatrix} 3 & -9 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -28 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3+(-28) & -9+(-4) & -6+0 \\ 6+0 & 3+4 & 0+(-8) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -25 & -13 & -6 \\ 6 & 7 & -8 \end{Vmatrix}.$$

Матриця

$$X = B - A = \begin{Vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 7-1 & 1-(-3) & 0-(-2) \\ 0-2 & -1-1 & 2-0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

2) Лінійна комбінація неможлива і рівняння не має розв'язків, оскільки матриці $A_{2\times 2}$ та $B_{2\times 3}$ різного розміру. ●

Навчальна задача 1.2. Знайти лінійну комбінацію $\vec{y} = 3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3$ стовпців

$$\vec{x}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}; \vec{x}_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}; \vec{x}_3 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix}.$$

❍ $\vec{y} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3-(-2)+2 \\ 6-0+3 \\ 0-2+5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ ●

Навчальна задача 1.3. Транспонувати матриці:

1) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 7 \end{Vmatrix};$

2) $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$

❍ 1) Записуючи перший та другий рядки матриці A відповідно як перший та другий стовпці матриці A^T, дістанемо

$$A^T = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{Vmatrix}.$$

2) Записуючи рядок матриці B у стовпець матриці B^T дістанемо

$$B^T = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{Vmatrix}. \bullet$$

Навчальна задача 1.4. Обчислити добутки матриць AB та BA, суму матриць $A+B$ та різницю матриць $A-B$, якщо вони існують:

1) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$, $B = A^T$;

2) $A = B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix};$

3) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix}, B = A^T.$

❍ 1) Матриці A та B і B та A узгоджені, отже,

$$\begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 \end{Vmatrix}^T = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{Vmatrix} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = 20;$$

$$\begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 4 & 0 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Матриці A та B різних розмірів, отже, не існує їхня сума $A + B$ та різниця $A - B$.

2) Оскільки матриці $A_{2\times3}$ та $B_{2\times3}$ не узгоджені, то їхнє множення не можливе. Вони однакового розміру, отже,

$$A + B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix} = 2 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 4 & 0 & -8 \end{Vmatrix};$$

$$A - B = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3) Матриці A та B і B та A узгоджені, але різного розміру. Отже, добуток матриць визначено, а суми та різниці матриць не існує.

$$AB = AA^T = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & -4 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 \cdot 1 + (-3)(-3) + (-2) \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-4) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 20 \end{Vmatrix};$$

$$BA = A^T A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & -4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & -3 & -10 \\ -3 & 9 & 6 \\ -10 & 6 & 20 \end{Vmatrix}. \quad ●$$

Навчальна задача 1.5.

Знайти $(AB)C$ та $A(BC)$, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

❍ Маємо:

$$AB = \begin{Vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{Vmatrix}, (AB)C = \begin{Vmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{Vmatrix},$$

$$BC = \begin{Vmatrix} -10 \\ 1 \end{Vmatrix}, A(BC) = \begin{Vmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{Vmatrix},$$

$(AB)C = A(BC)$, що й узгоджується із властивістю асоціативності множення матриць. ●

Навчальна задача 1.6. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - x + 2,\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix}$.

❍ $f(A) = A^2 - A + 2E_2$. Тоді,

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix};$$

$$f(A) = \begin{Vmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -15 \\ 0 & 14 \end{Vmatrix}. \; ●$$

Навчальна задача 1.7. Задано матрицю $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Довести, що $A^n = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, де $A^{-n} \overset{\text{den}}{=} (A^{-1})^n, n \in \mathbb{N}$.

❍При $n = 1$ — твердження правдиве:

$$A^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Припустімо, що твердження правдиве для $n = k$ і при цьому припущенні розгляньмо

$$A^{k+1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{k+1} = A^k A = \begin{Vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \left\| \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$(A^{-1})^{k+1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{k+1} = (A^{-1})^k A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \left\| \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -k-1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже, твердження правдиве і для $n = k + 1$. Згідно із принципом математичної індукції це означає, що твердження справджується для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. ●

Навчальна задача 1.8.

Серед матриць вигляду $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ 6 & 8 \end{Vmatrix}$ знайти переставні з матрицею $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

❍ Знайдімо добутки AB та BA і прирівняймо їх:

$$AB = \begin{Vmatrix} a & b \\ 6 & 8 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a+3b & 2a+4b \\ 30 & 44 \end{Vmatrix};$$

$$BA = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ 6 & 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a+12 & b+16 \\ 3a+24 & 3b+32 \end{Vmatrix}.$$

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} a+3b & 2a+4b \\ 30 & 44 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a+12 & b+16 \\ 3a+24 & 3b+32 \end{Vmatrix}.$$

Дві матриці рівні, якщо в них рівні відповідні елементи:

$$\begin{Vmatrix} a+3b & 2a+4b \\ 30 & 44 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a+12 & b+16 \\ 3a+24 & 3b+32 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = a+12, \\ 2a+4b = b+16, \\ 30 = 3a+24, \\ 44 = 3b+32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \end{cases}$$

Отже,

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{Vmatrix} = 2B. \bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1.

Знайдіть матрицю $C = 3A - 4B$ (якщо це можливо). Розв'яжіть рівняння $A + X = B$, якщо:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

❍ $C = \begin{Vmatrix} -10 & -25 \\ 13 & -5 \\ 8 & 12 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 1 \\ -2 & -5 \end{Vmatrix}. \bullet$

Задача 1.2.

Знайдіть лінійну комбінацію $2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$ стовпців

$$\vec{x}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}; \vec{x}_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}; \vec{x}_3 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix}.$$

❍ $\vec{y} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{Vmatrix}$. ●

Задача 1.3. Транспонуйте матрицю $C = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \\ -2 & 6 & 5 \end{Vmatrix}$.

❍ $C^T = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$. ●

Задача 1.4. Обчисліть добуток матриць AB, BA або вкажіть на неможливість перемноження:

1) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$;

2) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{Vmatrix}, B = A^T$.

❍ 1) $AB = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{Vmatrix}, BA = \begin{Vmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{Vmatrix}$;

2) $AB = \begin{Vmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 20 \end{Vmatrix}, BA = \begin{Vmatrix} 5 & -3 & -10 \\ -3 & 9 & 6 \\ -10 & 6 & 20 \end{Vmatrix}$. ●

Задача 1.5. Задано матриці A, B та C. Знайдіть $A(BC), (AB)C$ і покажіть $A(BC) = (AB)C$, якщо:

1) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 5 & 14 \\ -2 & -30 \end{Vmatrix}$;

2) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} -1 & 9 & 3 & 6 \end{Vmatrix}.$

❍ 1) $\begin{Vmatrix} 43 & 96 \\ 18 & 758 \\ 28 & 1030 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 52 & -468 & -156 & -312 \\ -19 & 171 & 57 & 114 \end{Vmatrix}$. ●

Задача 1.6. Знайдіть значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

❍ $\begin{Vmatrix} -24 & 12 \\ -12 & -12 \end{Vmatrix}$. ●

Задача 1.7. Задано матрицю $A = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$. Доведіть, що $A^n = \begin{Vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{Vmatrix}$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ де $A^{-n} \overset{\text{den}}{=} (A^{-1})^n, n \in \mathbb{N}$.

Задача 1.8. Знайдіть всі матриці, переставні з матрицею $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

❍ $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & a \end{Vmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$. ●