

## Модуль 2. Визначники

### Практична частина

#### 1. Контрольні запитання

1. Наведіть означення доповняльного мінора та алгебричного доповнення елемента матриці.
2. Сформулюйте означення визначника матриці.
3. У чому полягає формула розкладу визначника за будь-яким рядком (стовпцем)?
4. Що впливає із властивості рівноправності рядків і стовпців визначника?
5. Сформулюйте основні властивості визначника (1—4).
6. Сформулюйте властивості 5—8 визначника.
7. Які з перетворень матриці звать елементарними?
8. Як елементарні перетворення матриці впливають на її визначник?
9. У чому полягає ідея методу зведення визначника до трикутного вигляду?
10. У чому полягає метод опорного елемента?
11. Який визначник звать Вандермондовим?

#### 2. Навчальні задачі

##### Навчальна

##### задача 2.1.

Задано матрицю  $A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ . Знайти доповняльні мінори та алгебричні доповнення елементів: 1)  $a_{12}$ ; 2)  $a_{21}$ .

$$\textcircled{1} M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - 6 \cdot 7 = -12 - 42 = -54, A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 54.$$

$$2) M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4, A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 4. \bullet$$

##### Навчальна

##### задача 2.2.

Обчислити за означенням:

$$1) |-3|;$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$\textcircled{1} |-3| = -3;$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-2) \cdot 3 = 13;$$

$$\begin{aligned}
 3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \\
 &= (2 \cdot (-3) - 0 \cdot 5) - 3((-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 1) + ((-1) \cdot 5 - 2 \cdot 1) = \\
 &= -6 - 9 - 7 = -22. \bullet
 \end{aligned}$$

**Навчальна  
задача 2.3.**

Розкласти визначник  $B$  за 1-м рядком, а визначник  $C$  за 2-м стовпцем, якщо

$$B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 3 & b & 6 \\ 7 & c & -4 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \circ B &= \bar{i}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \bar{j}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= -12\bar{i} + 21\bar{j} + 15\bar{k};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= a(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} + c(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \\
 &= 54a + 10b - 12c. \bullet
 \end{aligned}$$

**Навчальна  
задача 2.4.**

Обчислити визначник матриці  $A$ , використавши його властивості, якщо

$$A = \begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 36 & 18 \end{vmatrix}.$$

$$\circ \begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 36 & 18 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 36 & 18 \end{vmatrix} = 100 \cdot 18 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1800 \cdot (-3) = -5400. \bullet$$

**Навчальна  
задача 2.5.**

Користуючись властивостями, довести, що

$$\begin{vmatrix} 4\alpha + 2\beta & 4 & 2 \\ 2\alpha + 3\beta & 2 & 3 \\ -\alpha + \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \circ \begin{vmatrix} 4\alpha + 2\beta & 4 & 2 \\ 2\alpha + 3\beta & 2 & 3 \\ -\alpha + \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4\alpha & 4 & 2 \\ 2\alpha & 2 & 3 \\ -\alpha & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\beta & 4 & 2 \\ 3\beta & 2 & 3 \\ \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \alpha \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \bullet
 \end{aligned}$$

**Навчальна  
задача 2.6.**

Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$  зведенням до трикутного вигляду.

$$\begin{aligned} & \circ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - 3\bar{a}_1 \\ \bar{b}_3 = \bar{a}_3 + 2\bar{a}_1 \\ \bar{b}_4 = \bar{a}_4 - 2\bar{a}_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \bar{c}_3 = \frac{4}{3}\bar{b}_2 \\ \bar{c}_4 = \bar{b}_4 - \frac{2}{3}\bar{b}_2 \end{array} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \bar{d}_4 = \frac{10}{41}\bar{c}_4 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{65}{41} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{41}{3} \cdot \left(-\frac{65}{41}\right) = -65. \bullet \end{aligned}$$

**Навчальна  
задача 2.7.**

Обчислити визначник  $n$ -го порядку

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

○ Розкладімо визначник за першим рядком

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot D_{n-1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n+2} D_{n-1}.$$

Так само  $D_{n-1} = (-1)^{n+1} D_{n-2}$  і так далі. Отже,

$$D_n = (-1)^{n+2} (-1)^{n+1} \dots (-1)^{2+2} D_1.$$

Враховуючи, що

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n, (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}, \dots, (-1)^{2+2} = (-1)^2;$$

$$D_1 = -1,$$

дістаньмо вираз для

$$D_n = (-1)^n (-1)^{n-1} \dots (-1)^2 (-1)^1 = (-1)^{1+2+\dots+n} = (-1)^{n(n+1)/2}. \bullet$$

### 3. Задачі для самостійного розв'язання

#### Задача 2.1.

Задано матрицю  $A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ . Знайдіть доповняль-

ний мінор та алгебричне доповнення елементів:

1)  $a_{22}$ ; 2)  $a_{32}$ .

○ 1)  $M_{22} = -2, A_{22} = -2$ ; 2)  $M_{32} = 24, A_{32} = -24$ . ●

#### Задача 2.2.

Обчисліть за означенням:

1)  $|5|$ ;

2)  $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ ;

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ ;

4)  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ .

○ 1) 5; 2) -15; 3) -10; 4) -42. ●

#### Задача 2.3.

Обчисліть визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ :

1) зведенням до трикутного вигляду;  
2) методом опорного елемента.

○ 45. ●

#### Задача 2.4.

Обчисліть визначник  $n$ -го порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

○  $2n + 1$ . ●