Модуль 3. Ранг матриці. Обернена матриця

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Наведіть означення мінора матриці A порядку k. Порівняйте з означенням доповняльного мінора елемента матриці A.
2. Що звуть рангом матриці $A_{m\times n}$? Чи може ранг матриці бути більше за m чи n ?
3. Сформулюйте теорему про базисний мінор.
4. Чому дорівнює ранг східчастої матриці?
5. Який зв'язок між рангом матриці та лінійною залежністю її стовпців (рядків)?
6. Як зв'язана лінійна залежність (незалежність) рядків квадратної матриці з її визначником?
7. Наведіть означення оберненої матриці і сформулюйте критерій оборотності матриці A.
8. У чому полягає метод приєднаної матриці знаходження оберненої матриці?
9. У чому полягає метод Ґауса — Йордана (або елементарних перетворень) знаходження оберненої матриці?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 3.1. Користуючись означенням, дослідити ранг матриці
$$A=\begin{Vmatrix}1 & \lambda & \lambda\\ -3 & 3 & 3\end{Vmatrix}$$
залежно від параметра λ.

❍ Оскільки матриця A має лише 2 рядки, то $\operatorname{rang} A\le 2$. Випишімо всі мінори 2-го порядку
$$M_1=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ -3 & 3\end{vmatrix}, M_2=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ -3 & 3\end{vmatrix}, M_3=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda\\ 3 & 3\end{vmatrix}.$$
$M_3=0, \forall\lambda\in\mathbb{R}$ (рядки однакові — пропорційність рядків); $M_1=M_2=3+3\lambda=0$ при $\lambda=-1$, отже, за означенням рангу матриці
$$\operatorname{rang} A=1 \text{ при } \lambda=-1 \text{ та } \operatorname{rang} A=2 \text{ при } \lambda\ne-1. ●$$

Навчальна задача 3.2. З'ясувати, чи є система стовпців
$$\vec{a}_1=\begin{Vmatrix}2\\ -3\\ 1\end{Vmatrix}, \vec{a}_2=\begin{Vmatrix}2\\ -8\\ 5\end{Vmatrix}, \vec{a}_3=\begin{Vmatrix}1\\ -4\\ 3\end{Vmatrix}$$
лінійно незалежною.

❍ Обчислімо визначник матриці із стовпцями $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -8 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

отже, стовпці $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні за наслідком 3 із твердження 3.1.●

Навчальна задача 3.3. Застосовуючи метод Ґауса — Йордана (елементарних перетворень), знайти ранг матриці $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$.

❍Див. *п. 3.4.3.*●

Навчальна задача 3.4. Знайдіть обернену матрицю до матриці A методом приєднаної матриці та Ґауса — Йордана (елементарних перетворень), якщо:

1) $A = \begin{Vmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$; 2) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{Vmatrix}$.

❍1) Розв'язання методом приєднаної матриці.

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 9 = 5 \neq 0.$$

Знайдімо алгебричні доповнення до елементів матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \;\; A_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot 9 = -9, \;\; A_{22} = (-1)^4 \cdot 7 = 7.$$

За формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 7 \end{Vmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання методом елементарних перетворень.

$$\left\Vert \begin{array}{cc:cc} 7 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 9 & 1 & 0 \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -7 \end{array} \right\Vert \sim$$

$$\sim \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{array} \right\Vert \Rightarrow A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{Vmatrix}.$$

2) Див. *п. 3.4.5* і *п. 3.4.6.*●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Користуючись означенням, дослідити ранг матриці A

залежно від параметра λ, якщо:

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix};\ 2)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^T.$$

❍1) $\operatorname{rang} A = 2, \forall\lambda \in \mathbb{R}$;

2) $\operatorname{rang} A = 1$ при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ та $\operatorname{rang} A = 2$ при $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$. ●

Задача 3.2. З'ясуйте, чи є система стовпців $\vec{a}_1 = \begin{Vmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{Vmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{Vmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{Vmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$ лінійно незалежною?

❍Система лінійно залежна. ●

Задача 3.3. Знайдіть ранг матриці A, застосовуючи метод елементарних перетворень, якщо

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{Vmatrix};\ 2)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{Vmatrix}.$$

❍1) $\operatorname{rang} A = 2$; 2) $\operatorname{rang} A = 3$. ●

Задача 3.4. Знайдіть обернену матрицю до матриці A методом приєднаної матриці та методом елементарних перетворень:

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{Vmatrix};\ 2)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{Vmatrix}.$$

❍1) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{Vmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$. ●