Модуль 4. Системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

Практична частина

1. Контрольні питання

1. Що звуть системою лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)?
2. Чи може визначена система бути несумісною і сумісна система невизначеною? Відповідь обґрунтувати.
3. Які системи звуть рівносильними?
4. Що звуть елементарними перетвореннями СЛАР?
5. Сформулюйте критерій сумісності СЛАР.
6. У чому полягає основна ідея розв'язання системи методом Ґауса — Йордана? Порівняйте з методом знаходження рангу матриці.
7. Яку систему звуть однорідною?
8. Чи може однорідна система бути несумісною?
9. Яку сукупність розв'язків однорідної СЛАР звуть фундаментальною системою розв'язків?
10. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР.
11. Запишіть формули Крамера розв'язання СЛАР. Чи для будь-якої системи вони застосовні?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 4.1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь методом Ґауса — Йордана

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$$

❍ Див. *п. 4.4.4.* ●

Навчальна задача 4.2. Визначити значення параметра λ, при якому система

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок і знайдіть цей розв'язок.

❍Зведімо розширену матрицю системи (що збігається для однорідної системи з матрицею системи) до східчастого вигляду:

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & \lambda & 2 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \overleftarrow{b}_1 = \overleftarrow{a}_3 \\ \vec{a}_2 \rightleftarrows \vec{a}_3 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & \lambda \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}\right\| \end{array} \begin{matrix} \\ \overleftarrow{c}_2 = \overleftarrow{b}_2 - 4\overleftarrow{b}_1 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 - 2\overleftarrow{b}_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & -1 & -1-4\lambda \\ 0 & -1 & 1-2\lambda \end{matrix}\right\| \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \overleftarrow{d}_3 = \overleftarrow{c}_3 - \overleftarrow{c}_2 \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & \lambda \\ 0 & -1 & -1-4\lambda \\ 0 & 0 & 2+2\lambda \end{matrix}\right\| \end{array}.$$

Однорідна система матиме ненульовий розв’язок, коли ранг матриці системи буде менше 3 (кількості невідомих). Отже, коли $2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \end{array} \vec{d}_2 \rightleftarrows \vec{d}_3 \to \left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix}\right\| \overleftarrow{b}_2 = \frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{matrix}\right\| \overleftarrow{c}_1 = \overleftarrow{b}_1 + \overleftarrow{b}_2 \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{matrix}\right\|$$

Змінні x_1, x_2 — базисні, $x_3 = C_1$ — вільна змінна, $C_1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & C_1 \end{matrix} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{matrix}\right\| \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}C_1 = 0, \\ x_2 - \frac{1}{3}C_1 = 0, \\ x_3 = C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}C_1, \\ x_2 = \frac{1}{3}C_1, \\ x_3 = C_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \left\|\begin{matrix} -\frac{5}{3}C_1 \\ \frac{1}{3}C_1 \\ C_1 \end{matrix}\right\| = C_1 \left\|\begin{matrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{matrix}\right\|. \bullet$$

Навчальна задача 4.3.

Дослідити на сумісність і знайти загальний розв’язок СЛАР:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

❍ 1) Див. *п. 4.4.1.*

2) Розв'яжімо систему методом Ґауса — Йордана:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 = \overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_1 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_3 + \overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_2 = -\dfrac{1}{7}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 + \dfrac{1}{7}\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right\| \begin{vmatrix} \operatorname{rang} A = 3 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 3 \end{vmatrix}$$

Отже, система має єдиний розв'язок. Знайдімо його

$$\begin{array}{l} \overleftarrow{d}_1 = \overleftarrow{c}_1 + \overleftarrow{c}_3 \\ \overleftarrow{d}_2 = \overleftarrow{c}_2 + \dfrac{1}{3}\overleftarrow{c}_3 \\ \overleftarrow{d}_3 = \dfrac{1}{3}\overleftarrow{c}_3 \end{array} \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\| \overleftarrow{e}_1 = \overleftarrow{d}_1 - 2\overleftarrow{d}_2 \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \left\|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -3 \end{array}\right\|. \bullet$$

Навчальна задача 4.4. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідної СЛАР і фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної СЛАР, якщо

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

❍ Розв'яжімо систему методом Ґауса — Йордана.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 = \dfrac{1}{2}\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}^2 - \dfrac{3}{2}\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}^3 - \dfrac{9}{2}\overleftarrow{a}_1 \end{array} \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & \dfrac{7}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\dfrac{11}{2} & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} & -5 \\ 0 & -\dfrac{55}{2} & -\dfrac{25}{2} & \dfrac{5}{2} & -25 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_1 = \overleftarrow{b}_1 + \dfrac{7}{11}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_2 = -\dfrac{2}{11}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 - 5\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & C_1 & C_2 & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{|l|} \operatorname{rang} A = 2 \\ \operatorname{rang}\left(A \mid \vec{b}\right) = 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11} C_1 - \frac{9}{11} C_2, \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11} C_1 + \frac{1}{11} C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \left\| \begin{matrix} -\frac{2}{11} + \frac{1}{11} C_1 - \frac{9}{11} C_2 \\ \frac{10}{11} - \frac{5}{11} C_1 + \frac{1}{11} C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\| = \underbrace{\left\| \begin{matrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|}_{\vec{x}_*} + \underbrace{C_1 \underbrace{\left\| \begin{matrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|}_{\vec{g}_1} + C_2 \underbrace{\left\| \begin{matrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|}_{\vec{g}_2}}_{\vec{x}_0};$$

ФСР відповідної однорідної системи: $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$. ●

Навчальна задача 4.5.

Розв'язати систему $\begin{cases} x + 4y = -10, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ за формулами Крамера.

❍ 1) Див. *п. 4.4.6.* ●

Навчальна задача 4.6.

Розв'язати матричне рівняння:

1) $\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix} \right\| X = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\|$;

2) $AX = B, XA = B$, де $A = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, B = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right\|$.

❍1) Див. *п. 4.4.7.*

2) Матриця A невироджена $(\det A = -1)$, а, отже, оборотна:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow E_2 X = A^{-1}B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

$$XA = B \Leftrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow XE_2 = BA^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = BA^{-1} = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

Навчальна задача 4.7.

Розв'язати систему $A\vec{x} = \vec{b}$, методом оберненої матриці, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{Vmatrix}, \vec{b} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{Vmatrix}.$$

❍ Якщо матриця A невироджена, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Знайдімо обернену матрицю до матриці A методом приєднаної матриці.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0.$$

Отже, матриця A невироджена, тобто оборотна.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-29} \begin{Vmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{Vmatrix}.$$

$$\vec{x} = -\frac{1}{29} \begin{Vmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{29} \begin{Vmatrix} -29 \\ -87 \\ -145 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix}. \bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1.

Знайдіть фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь методом Ґауса — Йордана:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$

$$2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

❍1) $\{\vec{g}_1\}, C_1\vec{g}_1$, де $\vec{g}_1 = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 5 \end{Vmatrix}^T$;

2) $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}, C_1\vec{g}_1 + C_2\vec{g}_2$, де $\vec{g}_1 = \begin{Vmatrix} 8 & -6 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^T, \vec{g}_2 = \begin{Vmatrix} -7 & 5 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^T$.●

Задача 4.2. Визначте значення параметра λ, при якому система має ненульовий розв'язок, і знайдіть цей розв'язок, якщо:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

❍При $\lambda = -2$ загальний розв'язок $\vec{x} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^T, C_1 \in \mathbb{R}$, при $\lambda = 1$ загальний розв'язок $\vec{x} = \begin{Vmatrix} -(C_1 + C_2) & C_1 & C_2 \end{Vmatrix}^T, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, при $\lambda \neq 1$ та $\lambda \neq -2$ система має лише нульовий розв'язок.●

Задача 4.3. Дослідіть на сумісність і знайдіть загальний розв'язок СЛАР:

$$1)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

❍1) система несумісна;

2) якщо $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$, то $\vec{x} = \dfrac{1}{\lambda + 3} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^T$, якщо $\lambda = -3$, то система несумісна, якщо $\lambda = 1$, то $\vec{x} = \begin{Vmatrix} (1 - C_1 - C_2 - C_3) & C_1 & C_2 & C_3 \end{Vmatrix}^T$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Задача 4.4. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідної СЛАР і фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної СЛАР, якщо

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

❍ $\begin{Vmatrix} \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) & C_1 & C_2 & 1 \end{Vmatrix}^T, C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \vec{g}_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^T,$ $\vec{g}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^T$, ФСР: $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$. ●

Задача 4.5. Розв'яжіть системи $A\vec{x} = \vec{b}_i, i = 1, 2,$ методом оберненої матриці, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{Vmatrix}, \ 1)\ \vec{b}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \ 2)\ \vec{b}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}.$$

❍ 1) $\vec{x}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{11}{29} & \frac{7}{29} & \frac{6}{29} \end{Vmatrix}^T$; 2) $\vec{x}_2 = -\frac{1}{29}\begin{Vmatrix} -15\alpha + \beta + 3\gamma \\ \alpha - 2\beta - 6\gamma \\ 5\alpha - 10\beta - \gamma \end{Vmatrix}$. ●

Задача 4.6. Розв'яжіть систему за формулами Крамера:

$$1) \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$$

❍ 1) $\vec{x} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^T$; 2) $\vec{x} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}^T$.