# Модуль 5. Вектори. Лінійні дії над векторами

## Практична частина

### 1. Контрольні запитання

**1.** Що таке вектор, як його позначають і зображують? Який вектор звуть нульовим?
**2.** Що звуть довжиною вектора?
**3.** Які вектори звуть рівними?
**4.** Що означає відкласти заданий вектор від певної точки?
**5.** Які вектори звуть колінеарними?
**6.** Які вектори звуть компланарними?
**7.** Сформулюйте означення дій додавання векторів та множення вектора на число.
**8.** Що таке орт вектора?
**9.** Що звуть лінійною комбінацією векторів? Яку лінійну комбінацію звуть тривіальною?
**10.** Сформулюйте означення лінійно залежної і лінійно незалежної систем векторів. Яка необхідна й достатня умови лінійної залежності системи векторів?
**11.** Скільки лінійно незалежних векторів існує на прямій, на площині, у просторі?

### 2. Навчальні задачі

***Навчальна задача 5.1.***

Вказати на рис 5.29 сукупність рівних векторів, якщо точки $A_1, B_1$ — середини відрізків $AD$ та $BC$, а також $|A_1B_1| = |A_1A_2|$. Відкладіть від точки $C$ вектор $\overline{CD_1} = \overline{AB}$.

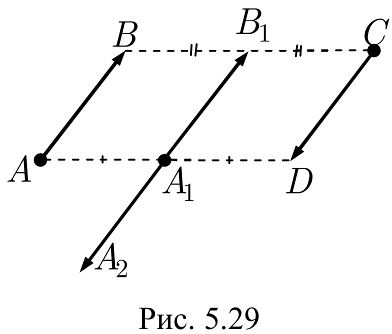


Рис. 5.29

❍ $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}, \overline{CD} = \overline{A_1A_2}$. Вектор $\overline{CD_1}$ — шуканий (рис. 5.30).●

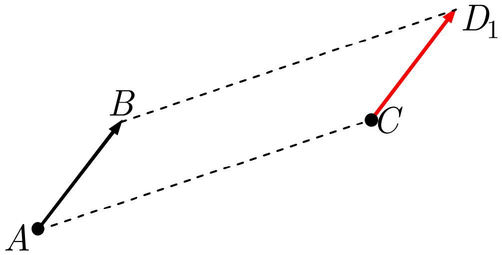


Рис. 5.30

***Навчальна задача 5.2.***

Вкажіть на рис 5.31, які із зображених векторів:
1) рівні;
2) зв'язані;
3) ковзні;
4) вільні?

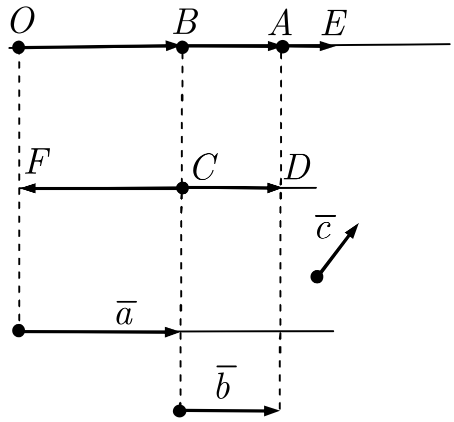


Рис. 5.31

❍1) $\overline{BA} = \overline{CD} = \overline{b}, \overline{OB} = \overline{a}$; 2) зв'язані — вектори $\overline{CF}$ та $\overline{CD}$; 3) ковзні — вектори $\overline{OB}, \overline{BA}, \overline{AE}$; 4) вільні — $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. ●

***Навчальна задача 5.3.***

Побудуйте три вектори з початком у точці $O$, що дорівнюють векторам $\overline{AB}, \overline{BC}$ та $\overline{CA}$ (рис. 5.32).

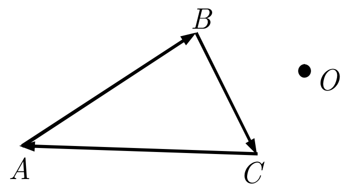


Рис. 5.32

❍Будуємо вектори $\overline{OM} = \overline{AB}, \overline{OP} = \overline{CA}, \overline{ON} = \overline{BC}$ (рис. 5.33).

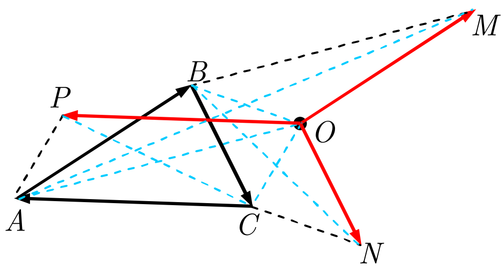


Рис. 5.33

Відкладання векторів від однієї точки ще звуть зведенням векторів до спільного початку. ●

***Навчальна задача 5.4.***

Знайдіть суму векторів $\overline{D_1A_1}, \overline{AB}$ та $\overline{CC_1}$, зображених на рис. 5.34.

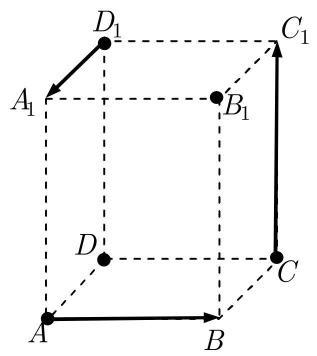


Рис. 5.34

❍За початкову точку зручно взяти точку $D$. Сумою векторів є вектор $\overline{DB_1}$ (рис. 5.35). ●

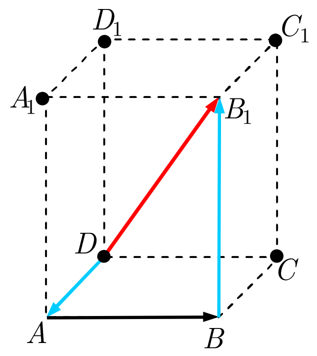


Рис. 5.35

***Навчальна задача 5.5.***

За заданими векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ (рис. 5.36) побудувати вектор $\dfrac{1}{2}\overline{a} - 3\overline{b}$.

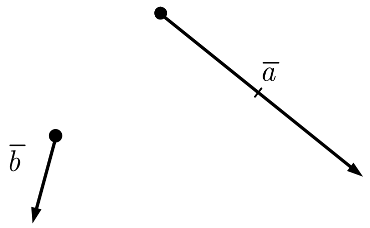


Рис. 5.36

❍Побудуймо вектори $\dfrac{1}{2}\overline{a}$ та $3\overline{b}$. Виберімо точку $O$ у просторі та зведімо вектори до спільного початку (рис. 5.37). Вектор $\overline{CB}$ — шуканий.

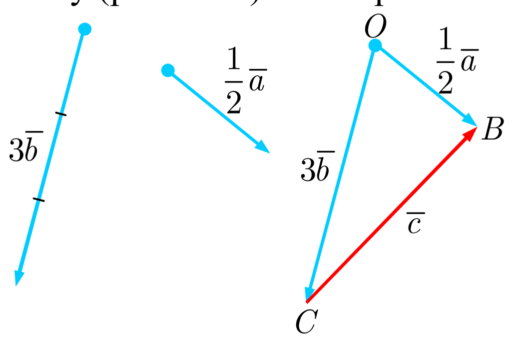


Рис. 5.37

**Навчальна задача 5.6.**

Як мають бути ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$, щоб

$$\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}?$$

❍У лівій частині рівності записано орт вектора $\overline{a}$, а у правій — орт вектора $\overline{b}$. Рівність ортів двох векторів означає їх однакову напрямленість. Отже, вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — однаково напрямлені.●

**Навчальна задача 5.7.**

Вектори $\overline{AD}, \overline{BE}$ та $\overline{CF}$ — медіани $\Delta ABC$. Довести, що $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$ (рис. 5.38).

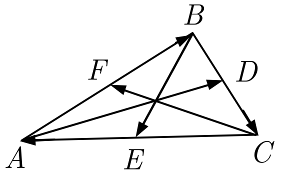


Рис. 5.38

❍ Маємо:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC};$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA};$$

$$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB};$$

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{3}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) = \frac{3}{2}\cdot\overline{0} = \overline{0}.●$$

**Навчальна задача 5.8.**

$M$ — точка перетину медіан $\Delta ABC$, $O$ — довільна точка простору. Довести, що $\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$ (рис. 5.39).

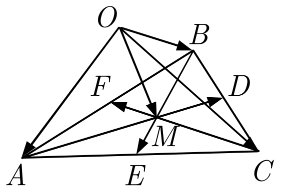


Рис. 5.39

❍Маємо:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AD};$$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = \overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{BE};$$

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \overline{OC} + \frac{2}{3}\overline{CF};$$

$$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \frac{2}{3}\left(\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}\right) = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

Скористались результатом *навчальної задачі 5.7.* ●

**Навчальна задача 5.9.** Три сили $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ та $\overline{F}_3$ прикладено до однієї точки і напрямлено взаємно перпендикулярно. Визначити довжину їхньої рівнодійної $\overline{F}$, якщо $\left|\overline{F}_1\right| = 2, \left|\overline{F}_2\right| = 10, \left|\overline{F}_3\right| = 11.$

❍ Оскільки сили взаємно перпендикулярні, то рівнодійна $\overline{F}$ напрямлена вздовж діагоналі паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ як на боках (рис. 5.40), та її модуль $\left|\overline{F}\right|$ дорівнює довжині діагоналі паралелепіпеда:

$$\left|\overline{F}\right| = \sqrt{\left|\overline{F}_1\right|^2 + \left|\overline{F}_2\right|^2 + \left|\overline{F}_3\right|^2} = \sqrt{4 + 100 + 121} = 15.$$

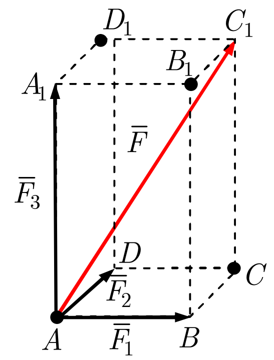


Рис. 5.40

**Відповідь:** $\left|\overline{F}\right| = 15.$ ●

**Навчальна задача 5.10.** Задано: $\Delta ABC, \overline{AM} = \alpha\overline{AB}, \overline{AN} = \beta\overline{AC}$. Знайти при яких значеннях $\alpha$ та $\beta$ вектори $\overline{MN}$ та $\overline{BC}$ — колінеарні (рис. 5.41).

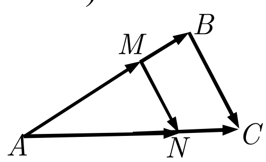


Рис. 5.41

❍ $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}; \overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \beta\overline{AC} - \alpha\overline{AB}.$

$$\overline{MN} = k\overline{BC} \Rightarrow \beta\overline{AC} - \alpha\overline{AB} = k\overline{AC} - k\overline{AB};$$

$$(\beta - k)\overline{AC} - (\alpha - k)\overline{AB} = \overline{0}.$$

Вектори $\overline{AC}$ та $\overline{AB}$ — ненульові і неколінеарні, тобто лінійно незалежні. Тоді рівність можлива лише коли $\alpha - k = 0, \beta - k = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$ ●

**Навчальна задача 5.11.** Задано вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Чи колінеарні вектори

$$\overline{p}_1 = \overline{a} - 2\sqrt{3}\,\overline{b} \text{ та } \overline{p}_2 = -\sqrt{3}\,\overline{a} + 6\overline{b}\,?$$

❍Так, вектори $\overline{p}_1$ та $\overline{p}_2$ колінеарні, протилежно напрямлені, оскільки $\overline{p}_2 = -\sqrt{3}\overline{p}_1$. ●

**Навчальна задача 5.12.**

Спростити вираз $2(3\overline{a} + \overline{b}) - 4\overline{a}$ і вказати властивості лінійних дій над векторами, спираючись на які, відбувалось спрощення.

❍$2(3\overline{a} + \overline{b}) - 4\overline{a} \overset{10.}{=} 2(3\overline{a}) + 2\overline{b} - 4\overline{a} \overset{8.}{=} (2\cdot 3)\overline{a} + 2\overline{b} - 4\overline{a} =$

$\overset{2.}{=} 2\overline{b} + 6\overline{a} - 4\overline{a} \overset{3.}{=} 2\overline{b} + (6\overline{a} - 4\overline{a}) \overset{10.}{=} 2\overline{b} + (6-4)\overline{a} \overset{9.}{=} 2(\overline{b} + \overline{a})$.●

## 3. Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 5.1.**

У трикутнику $ABC$ вектор $\overline{AB} = \overline{m}$ і вектор $\overline{AC} = \overline{n}$. Побудуйте кожен з векторів:

1) $\dfrac{\overline{m} + \overline{n}}{2}$; 2) $\dfrac{\overline{m} - \overline{n}}{2}$;

3) $\dfrac{\overline{n} - \overline{m}}{2}$; 4) $-\dfrac{\overline{m} + \overline{n}}{2}$.

**Задача 5.2.**

У трикутнику $ABC$ задано $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, точка $M$ — середина боку $BC$. Виразіть вектор $\overline{c} = \overline{AM}$ через вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

❍ $\overline{c} = \dfrac{1}{2}\overline{a} + \dfrac{1}{2}\overline{b}$. ●

**Задача 5.3.**

У трикутнику $ABC$ : $M$ — точка перетину медіан трикутника, $\overline{AM} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Розкладіть вектори $\overline{p} = \overline{AB}$ та $q = \overline{BC}$ за векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

❍ $\overline{p} = 3\overline{a} - \overline{b}, \overline{q} = 2\overline{b} - 3\overline{a}$. ●

**Задача 5.4.**

Вектори $\overline{AK}$ та $\overline{BM}$ — медіани трикутника $ABC$. Виразіть через $\overline{p} = \overline{AK}$ та $\overline{q} = \overline{BM}$ вектори $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{BC}$ та $\overline{c} = \overline{CA}$.

❍ $\overline{a} = \dfrac{2}{3}\overline{p} - \dfrac{2}{3}\overline{q}, \overline{b} = \dfrac{2}{3}\overline{p} + \dfrac{4}{3}\overline{q}$, $\overline{c} = -\dfrac{4}{3}\overline{p} - \dfrac{2}{3}\overline{q}$. ●

**Задача 5.5.**

На боці $AD$ паралелограма $ABCD$ відкладено вектор $\overline{a} = \overline{AK}$ завдовжки $\left|\overline{AK}\right| = \dfrac{1}{5}\left|\overline{AD}\right|$, а на діагоналі $AC$ — вектор $\overline{b} = \overline{AL}$ завдовжки $\left|\overline{AL}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\overline{AC}\right|$. Доведіть, що вектори $\overline{p} = \overline{KL}$ та $\overline{q} = \overline{LB}$ колінеарні.

❍ $\overline{KL} = 5\overline{LB}$. ●

**Задача 5.6.**

У трикутнику $ABC$: $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$ та $\overline{AN} = \beta\overline{AC}$. За якого співвідношення між $\alpha$ та $\beta$ вектори $\overline{a} = \overline{MN}$ та

$\overline{b} = \overline{BC}$ колінеарні?

❍ $\alpha = \beta$. ●