Модуль 6. Лінійні простори. Координати вектора

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення лінійного простору.
2. Наведіть означення базису лінійного простору.
3. Що таке вимірність лінійного простору?
4. Скільки векторів творить базис:
а) на прямій;
б) на площині;
в) у геометричному просторі?
Дайте геометричне тлумачення базису в кожному пункті.
5. Який зв'язок існує між будь-яким вектором лінійного простору і векторами базису цього простору?
6. Подайте означення координат вектора у фіксованому базисі.
7. Наведіть означення лінійних дій над векторами, якщо вектори задано їхніми координатами в деякому базисі.
8. Що звуть віссю?
9. Що розуміють під кутом між векторами і вектором та віссю?
10. Що звуть радіусом-вектором точки?
11. Що звуть координатами точки у прямокутній Декартовій системі координат?
12. Запишіть формули для знаходження координат вектора, якщо відомі координати його початку та кінця.
13. У якому разі кажуть, що точка M поділяє відрізок A_1A_2 у відношенні λ?
14. Запишіть формули для координат середини відрізка A_1A_2.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 6.1.

Чи будуть лінійними просторами:
1) порожня множина $\varnothing$;
2) множина O, що містить один нульовий елемент;
3) множина дійсних чисел з операціями:
$$x \oplus y = xy,\ \alpha \odot x = \alpha x\,?$$

❍ 1) Ні. В означенні лінійного простору вимагається існування нульового та протилежного елемента, а порожня множина не містить елементів.

2) Так. Справді,

$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \in O:$

$\mathrm{I}.\ \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} = \overline{0} + \overline{0}.$

$\mathrm{II}.\ (\overline{0} + \overline{0}) + \overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} + (\overline{0} + \overline{0}).$

$\mathrm{III}.\ \exists \overline{0} : \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}.$

$\mathrm{IV}.\ \exists!(-\overline{0}) = \overline{0} : \overline{0} + (-\overline{0}) = \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}.$

$\alpha\overline{0} = \overline{0} \in O:$

$\mathrm{V}.\ 1 \cdot \overline{0} = \overline{0}.$

$\mathrm{VI}.\ \alpha(\beta\overline{0}) = \alpha\overline{0} = \overline{0} = (\alpha\beta)\overline{0}.$

$\mathrm{VII}.\ \alpha(\overline{0} + \overline{0}) = \alpha\overline{0} = \overline{0} = \alpha\overline{0} + \alpha\overline{0}.$

$\mathrm{VIII}.\ (\alpha + \beta)\overline{0} = \overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = \alpha\overline{0} + \beta\overline{0}.$

3) Ні. Справді,

$\mathrm{I}.\ x \oplus y = xy = yx = y \oplus x;$

$\mathrm{II}.\ (x \oplus y) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (y \oplus z);$

$\mathrm{III}.\ \exists \overline{0} = 1 : x \oplus \overline{0} = 1x = x \cdot 1 = x \oplus \overline{0}.$

$\mathrm{IV}.\ \overline{0} = x \oplus (\ominus x) \Rightarrow 1 = x(\ominus x)$. Отже, повинно бути $\ominus x = \dfrac{1}{x}, \forall x$. Але для числа 0 протилежний елемент відсутній. ●

Навчальна задача 6.2. Чи можна означити у множині із двох елементів додавання та множення на число так, щоб ця множина перетворилась на лінійний простір?

❍ Ні. Розгляньмо $\Omega = \{x, y\}$. Нехай, приміром, $x = \overline{0}$. Протилежним елементові y може бути або x, тоді

$$y + x = y + \overline{0} = \overline{0} \Rightarrow y = \overline{0},$$

або y, тоді

$$y + y = 2y = \overline{0} \Rightarrow y = \overline{0}.$$

Отже, множина Ω містить лише один — нульовий елемент, що суперечить умові. ●

Навчальна задача 6.3. Дано вектори $\overline{a} = (4; 1; -1)^T$, $\overline{b} = (3; -1; 0)^T$, $\overline{c} = (-1; 1; 1)^T$ та $\overline{d} = (-1; 3; 4)^T$. Знайдіть числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такі, що $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = \overline{d}$.

❍ $$\lambda_1 \begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = -1, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 3, \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Ґауса — Йордана (*п. 3.3.2*) (відразу переставляючи 1-й та 2-й рядки):

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -13 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & -13 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right\| \left|\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3\right| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right\|.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4 \Leftrightarrow \overline{d} = 0 \cdot \overline{a} + \overline{b} + 4\overline{c}$. ●

Навчальна задача 6.4. З'ясуйте, при яких значеннях l та m вектори $\overline{a} = (l; -2; 5)^T$ та $\overline{b} = (1; m; -3)^T$ колінеарні?

❍ Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні (наслідок 1 із твердження 6.3):

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{l}{1} = \frac{-2}{m} = \frac{5}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -3l = 5, \\ 5m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow l = -\frac{5}{3}, m = \frac{6}{5}.$$

Відповідь. При $l = -\dfrac{5}{3}, m = \dfrac{6}{5}$. ●

Навчальна задача 6. 5. З'ясуйте, при яких λ вектори $\overline{a} = (2; 1; 3)^T$, $\overline{b} = (-3; 1; -2)^T$ та $\overline{c} = (\lambda; 1; 8)^T$ компланарні?

❍ Для компланарності векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ необхідно й достатньо, щоб ранг матриці, утвореної їхніми координатними стовпцями, був менший 3 (наслідок 2 із твердження 6.3):

$$A = \left\|\begin{matrix} 2 & -3 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & -3 & \lambda \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & \lambda - 2 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 \end{matrix}\right\|.$$

Для того щоб $\operatorname{rang} A < 3$ необхідно, щоб $\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 7$. ●

Навчальна задача 6.6. Перевірте, що вектори $\overline{a} = (4; 1; -1)^T, \overline{b} = (2; 2; -5)^T$ та $\overline{c} = (-1; 1; 1)^T$ творять базис у просторі. Знайдіть координати вектора $\overline{l} = (5; 4; -5)^T$ у цьому базисі.

❍ Для того щоб трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ 3-вимірного простору творила базис простору, необхідно й досить, щоб вона була лінійно незалежною. Отже, щоб ранг матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{Vmatrix},$$

утвореної з їхніх координат, дорівнював трьом. Тоді вектор $\overline{l}$ однозначно розкладається за цією трійкою

$$x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c} = \overline{l}.$$

Можливі 2 способи розв'язання задачі:

I. 1. Обчислити *визначник матриці* A.

2. У разі, якщо $\det A \neq 0$, розв'язати систему методом Крамера (*п. 4.3.1*).

II. (Див. *Навчальна задача 6.3*) 1. Виконати прямий хід методу Ґауса для системи.

2. У разі, якщо $\operatorname{rang} A = 3$, виконати зворотній хід.

Відповідь: $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$. ●

Навчальна задача 6.7. У просторі $\mathbb{V}^3$ задано вектори $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ у базисі $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Доведіть, що $\mathcal{B}' = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$ творить базис простору $\mathbb{V}^3$, запишіть матрицю переходу $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ та знайдіть координати вектора $\overline{x}$ у цьому базисі, якщо

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2,$$
$$\overline{e}_2' = \overline{e}_1 - \overline{e}_2,$$
$$\overline{e}_3' = -\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 - \overline{e}_3,$$
$$\overline{x} = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3.$$

❍ $$\overline{e}_1' = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \overline{e}_2' = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \overline{e}_3' = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} \Rightarrow T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

$$\operatorname{rang} T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = 3 \Rightarrow \mathcal{B}' \text{ – базис} \Rightarrow \vec{x}' = (T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}\vec{x}.$$

$$(T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

$$\overline{x}' = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{Vmatrix}. \bullet$$

Навчальна задача 6.8. У просторі $\mathbb{V}^3$ задано вектори $\overline{a} = (4; -1; 2)^T$ та $\overline{b} = (-9; 0; 3)^T$. Знайдіть вектори $-\overline{a}$ та $2\overline{a} - 3\overline{b}$.

❍ За твердженням 6.2 лінійним діям над векторами відповідають лінійні дії над їхніми стовпцями координат у фіксованому базисі, тобто

$$-\overline{a} = -\begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix};$$

$$2\overline{a} - 3\overline{b} = 2\begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2\cdot 4 - 3\cdot(-9) \\ 2\cdot(-1) - 3\cdot 0 \\ 2\cdot 2 - 3\cdot 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 35 \\ -2 \\ -5 \end{Vmatrix}. \bullet$$

Навчальна задача 6.9. У якому октанті лежить точка, яка має у ПДСК координати $(2;-3;1)$?

❍Знаки координат заданої точки $+-+$ вказують, що точка лежить у IV октанті.●

Навчальна задача 6.10. Задано дві точки $A_1(1;2;0)$ та $A_2(4;6;-3)$. Знайти координати вектора $\overline{a} = \overline{A_1A_2}$.

❍За формулою *п. 6.5.1* маємо

$$\overline{a} = \begin{Vmatrix} x_{A_2} - x_{A_1} \\ y_{A_2} - y_{A_1} \\ z_{A_2} - z_{A_1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4-1 \\ 6-2 \\ -3-0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{Vmatrix}. \bullet$$

Навчальна задача 6.11. Задано три послідовних вершини паралелограма: $A(1;-2;3), B(3;2;1), C(6;4;4)$. Знайти його четверту вершину.

❍Нехай вершина $D(x;y;z)$. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то маємо

$$\overline{BC} = \overline{AD}.$$

Знайдімо координати векторів $\overline{BC}$ та $\overline{AD}$:

$$\overline{BC} = \begin{Vmatrix} 6-3 \\ 4-2 \\ 4-1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}, \quad \overline{AD} = \begin{Vmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-1=3, \\ y+2=2, \\ z-3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=0, \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(4;0;6). \bullet$$

Навчальна задача 6.12. Довести, що точки $A(-3;-7;-5), B(0;-1;-2)$ та $C(2;3;0)$ лежать на одній прямій, причому точка B розташована між точками A та C.

❍Досить перевірити, що вектори $\overline{AC}$ та $\overline{AB}$ колінеарні, причому вектор $\overline{AC}$ довший за вектор $\overline{AB}$. Отже,

$$\overline{AC} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{Vmatrix}, \overline{AB} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3},$$

то вектори $\overline{AC}$ та $\overline{AB}$ колінеарні, причому

$$\overline{AB} = \frac{3}{5}\overline{AC} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \frac{3}{5}\left|\overline{AC}\right|.$$

Отже, точки A, B та C лежать на одній прямій і точка B розташована між точками A та B.●

Навчальна задача 6.13. Задано точки $A(1;-1), B(-2;1), C(0;-3)$. У трикутнику ABC знайдіть:
1) точку M перетину медіани зі стороною BC (рис. 6.19);
2) точку O перетину медіан — центра мас однорідного трикутника ABC.

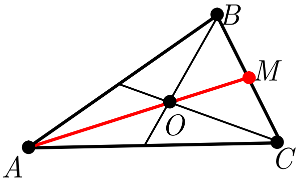

Рис. 6.19

❍1) Точка M — середина відрізка BC. Отже, $\lambda = 1$ і за формулами (7.2):

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = -1;\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = -1.$$

2) Точка O поділяє відрізок AM у відношенні $\lambda = 2$ і за формулами (7.1):

$$x_O = \frac{x_A + 2x_M}{3} = -\frac{1}{3};\ \ y_O = \frac{y_A + 2y_M}{3} = -1.$$

Оскільки точка O — центр мас однорідного трикутника ABC (тобто можна вважати, що у вершинах розташовано одиничні маси $m_1 = m_2 = m_3 = 1$), то за формулою (7.3):

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + (-2) + 0}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1 + 1 - 3}{3} = -1.$$

Відповідь: $M(-1;-1); O\left(-\frac{1}{3};-1\right)$.●

Навчальна Задано дві вершини $A(1;3;5)$, $B(-1;2;1)$ паралелограма

задача 6.14. $ABCD$ та точку перетину його діагоналей $E(1;0;1)$. Знайдіть дві інших вершини паралелограма.

❍Точка E — не є серединою відрізка AB $\left(1 \neq \frac{1}{2}(1-1) = 0\right)$. Отже, A та B — суміжні вершини (рис. 6.20)

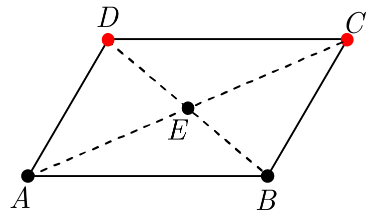

Рис. 6.20

Точка C поділяє відрізок AE зовнішнім чином у відношенні $\lambda = -2$:

$$x_C = 2x_E - x_A = 1;$$

$$y_C = 2y_E - y_A = -3;$$

$$z_C = 2z_E - z_A = -3.$$

Отже, точка $C(1;-3;-3)$. Так само точка $D(3;-2;1)$.

Відповідь: $C(1;-3;-3), D(3;-2;1)$. ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. З'ясуйте, чи є система векторів $\overline{a} = (2;0;0)^T, \overline{b} = (0;0;-3)^T$, $\overline{c} = (0;-1;0)^T$ лінійно залежна?

❍ Лінійно незалежна. ●

Задача 6.2. З'ясуйте, при яких значеннях l та m вектори $\overline{a} = (1;l;-1)^T$ та $\overline{b} = (2;-4;m)^T$ колінеарні?

❍ $l = -2; m = -2$. ●

Задача 6.3. З'ясуйте, при якому значенні λ вектори $\overline{a} = (1;7;-2)^T, \overline{b} = (-1;-5;4)^T$ та $\overline{c} = (1;3;\lambda)^T$ компланарні?

❍ $\lambda = -6$. ●

Задача 6.4. Перевірте, що вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ творять базис у просторі. Знайдіть координати вектора $\overline{l}$ у цьому базисі, якщо:

$$\overline{a} = (1;2;3)^T, \overline{b} = (1;4;1)^T,$$

$$\overline{c} = (-5;1;-3)^T, \overline{l} = (-12;13;-4)^T.$$

❍ $\overline{l} = \overline{a} + 2\overline{b} + 3\overline{c}$. ●

Задача 6.5. У просторі $\mathbb{V}^3$ задано вектори $\overline{a} = (-3;0;2)^T$ та $\overline{b} = (-1;-4;5)$. Знайдіть вектори $-\overline{b}, 2\overline{a} + \overline{b}$.

❍ $-\overline{b} = (1;4;-5)^T, 2\overline{a} + \overline{b} = (-7;-4;9)$. ●

Задача 6.6. У якому октанті лежить точка, яка має у ПДСК координати $(-8;-6;-3)$?

❍ VII октант. ●

Задача 6.7. Задано точки $A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4), D(-1;2;3)$. В піраміді $ABCD$ знайдіть орт вектора, що з'єднує середину ребра AD з точкою перетину медіан ΔABC.

❍ $\overline{e}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;-1)^T$. ●

Задача 6.8. Задано вершини $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини D, що протилежна вершині B.

❍ $D(9;-5;6)$. ●

Задача 6.9. Знайдіть координати центра мас O системи матеріальних точок, розташованих у вершинах ромба $ABCD$, якщо $m_A = 1,5, m_B = 2,$ $m_C = 0,5, m_D = 1;$ $A(-1;1), B(-2;0), C(-1;-1), D(0;0)$.

❍ $O\left(-\dfrac{6}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. ●