Модуль 7. Скалярне множення векторів

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Що звуть скалярною проекцією вектора на вісь?
2. Чим відрізняється проекція вектора на вісь від векторної проекції вектора на вісь?
3. Напишіть формулу, що виражає проекцію вектора на вісь через його довжину та кут з віссю.
4. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів. Поясність походження терміна «скалярний».
5. Який геометричний зміст координат вектора в ортонормованому базисі?
6. Як виражається скалярний добуток векторів в ортонормованому базисі? Що таке скалярний квадрат?
7. Запишіть умову ортогональності векторів, заданих координатами в ортонормованому базисі.
8. Які застосування має скалярний добуток у геометрії та механіці?
9. Що таке напрямні косинуси вектора? Подайте їхню характерну властивість.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 7.1.

Знайти довжину вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, якщо відомо, що $|\overline{a}| = 3; \left|\overline{b}\right| = 4, (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

$$❍\, |\overline{c}| = \sqrt{(\overline{c}, \overline{c})} = \sqrt{(2\overline{a} - 3\overline{b}, 2\overline{a} - 3\overline{b})} =$$

$$= \sqrt{4(\overline{a}, \overline{a}) - 6(\overline{a}, \overline{b}) - 6(\overline{b}, \overline{a}) + 9(\overline{b}, \overline{b})} = \sqrt{4|\overline{a}|^2 - 12|\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) + 9\left|\overline{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \cdot 4 \cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 4^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \bullet$$

Навчальна задача 7.2.

Задано: $|\overline{a}| = 2, |\overline{c}| = 5, (\overline{a}, \overline{c}) = 5$. Обчислити:
1) $(\overline{a}, \overline{a})$;
2) $(2\overline{a} - \overline{c}, 3\overline{a} + 4\overline{c})$.

❍ 1) $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 = 4$;

2) $$(2\overline{a} - \overline{c}, 3\overline{a} + 4\overline{c}) = 6(\overline{a}, \overline{a}) + 8(\overline{a}, \overline{c}) - 3(\overline{c}, \overline{a}) - 4(\overline{c}, \overline{c}) =$$
$$= 6(\overline{a}, \overline{a}) + 5(\overline{a}, \overline{c}) - 4(\overline{c}, \overline{c}) = -51. \bullet$$

Навчальна задача 7.3.

Задано: $\overline{a}_1 = (-1; 2, 0)^T, \overline{a}_2 = (3; 1; 1)^T$, $\overline{a}_3 = (2; 0; 4)^T$ та $\overline{a} = \overline{a}_1 - 3\overline{a}_2 + \frac{1}{2}\overline{a}_3$. Обчисліть:

1) $|\overline{a}_1|, \overline{a}_1^0$; 2) $\cos(\widehat{\overline{a}_1, \overline{j}}), \cos(\widehat{\overline{a}_1, \overline{k}})$;

3) $\overline{a}$; 4) $\mathrm{pr}_{\overline{i}}\, \overline{a}, \mathrm{pr}_{\overline{j}}\, \overline{a}, \mathrm{pr}_{\overline{k}}\, \overline{a}$.

❍ 1) $|\overline{a}_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$;

$$\overline{a}_1^0 = \frac{1}{|\overline{a}_1|}\overline{a}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right)^T;$$

2) $\cos(\widehat{\overline{a}_1, \overline{j}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos(\widehat{\overline{a}_1, \overline{k}}) = 0$;

3) $\overline{a} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -9 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}$;

4) $\text{pr}_{\overline{i}}\,\overline{a} = -9, \text{pr}_{\overline{j}}\,\overline{a} = -1, \text{pr}_{\overline{k}}\,\overline{a} = -1.$ ●

Навчальна задача 7.4. Задано вершини трикутника $A(3;2;-3), B(5;1;-1)$ та $C(1;-2;1)$. Знайдіть внутрішній кут при вершині A.

❍ Внутрішній кут при вершині A — це кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$. Кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ можна знайти за формулою

$$\cos\angle BAC = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}.$$

Знайдімо спершу координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \overline{AC} = \begin{Vmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

Звідси

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 4}{3\cdot 6} =$$

$$= \frac{-4+4+8}{18} = \frac{4}{9} \Rightarrow \angle BAC = \arccos\frac{4}{9}.$$ ●

Навчальна задача 7.5. Задано вектори $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ та $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

❍ Два ненульових вектори перпендикулярні, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулеві:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = m\cdot 4 + 3\cdot m + 4\cdot(-7) = 7m - 28 = 0 \Rightarrow m = 4.$$ ●

Навчальна задача 7.6. Задано вектори $\overline{a} = -\overline{m} + 6\overline{n}$ та $\overline{b} = 3\overline{m} + 4\overline{n}$, де $|\overline{m}| = 2$; $|\overline{n}| = 5$; $(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = \frac{2\pi}{3}$. Знайдіть:

1) $(\overline{a}, \overline{b})$; 2) $\mathrm{pr}_{\overline{b}}(4\overline{a} - 5\overline{b})$; 3) $\cos(\widehat{2\overline{b} - \overline{a}, 4\overline{b}})$.

❍ 1) Обчислюємо

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (-\overline{m} + 6\overline{n}, 3\overline{m} + 4\overline{n}) = -3(\overline{m}, \overline{m}) + 14|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) + 24(\overline{n}, \overline{n}) =$$

$$= -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 24 \cdot 5^2 = 518.$$

2) Нехай $\overline{c} = 4\overline{a} - 5\overline{b} = -19\overline{m} + 4\overline{n}$. Тоді

$$\mathrm{pr}_{\overline{b}}\, \overline{c} = \frac{(\overline{c}, \overline{b})}{|\overline{b}|},$$

$$(\overline{c}, \overline{b}) = (-19\overline{m} + 4\overline{n}, 3\overline{m} + 4\overline{n}) =$$

$$= -57(\overline{m}, \overline{m}) - 64|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) + 16(\overline{n}, \overline{n}) = -148,$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(\overline{b}, \overline{b})} = \sqrt{(3\overline{m} + 4\overline{n}, 3\overline{m} + 4\overline{n})} =$$

$$= \sqrt{9(\overline{m}, \overline{m}) + 24|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) + 16(\overline{n}, \overline{n})} = \sqrt{316}.$$

Остаточно маємо

$$\mathrm{pr}_{\overline{b}}(4\overline{a} - \overline{b}) = -\frac{148}{\sqrt{316}}.$$

3) Нехай $\overline{d} = 2\overline{b} - \overline{a} = 7\overline{m} + 2\overline{n}, \overline{e} = 4\overline{b} = 12\overline{m} + 16\overline{n}$. Тоді

$$\cos(\widehat{\overline{d}, \overline{e}}) = \frac{(\overline{d}, \overline{e})}{|\overline{d}||\overline{e}|},$$

$$(\overline{d}, \overline{e}) = (7\overline{m} + 2\overline{n}, 12\overline{m} + 16\overline{n}) =$$

$$= 84(\overline{m}, \overline{m}) + 136|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) + 32(\overline{n}, \overline{n}) = 456,$$

$$|\overline{d}| = \sqrt{(7\overline{m} + 2\overline{n}, 7\overline{m} + 2\overline{n})} =$$

$$= \sqrt{49(\overline{m}, \overline{m}) + 28|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) + 4(\overline{n}, \overline{n})} = \sqrt{156},$$

$$|\overline{e}| = \sqrt{(12\overline{m} + 16\overline{n}, 12\overline{m} + 16\overline{n})} =$$

$$= \sqrt{144(\overline{m}, \overline{m}) + 384|\overline{m}||\overline{n}|\cos(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) + 256(\overline{n}, \overline{n})} = \sqrt{5056}.$$

Отже,

$$\cos(\widehat{2\overline{b} - \overline{a}, 4\overline{b}}) = \frac{456}{\sqrt{788736}}. \bullet$$

Навчальна задача 7.7.

За координатами точок $A(-5; 1; 6)$, $B(1; 4; 3)$ та $C(6; 3; 9)$ для вказаних векторів знайти: 1) модуль вектора $\overline{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$; 2) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b} = \overline{BC}$; 3) проекцію вектора $\overline{c} = \overline{b}$ на вектор $\overline{d} = \overline{AB}$; 4) координати точки M, що поділяє відрізок $l = AB$ у відношенні $1 : 3$.

❍ 1) Знайдімо координати векторів

$$\overline{AB} = \left\| \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{matrix} \right\|, \overline{BC} = \left\| \begin{matrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{matrix} \right\|, 4\overline{AB} + \overline{BC} = \left\| \begin{matrix} 29 \\ 11 \\ -6 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left| 4\overline{AB} + \overline{BC} \right| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}.$$

2) Маємо

$$\overline{a} = \left\| \begin{matrix} 29 \\ 11 \\ -6 \end{matrix} \right\|, \overline{b} = \left\| \begin{matrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 29 \cdot 5 + 11 \cdot (-1) + (-6) \cdot 6 = 98.$$

3) Оскільки

$$\text{pr}_{\overline{d}}\, \overline{c} = \frac{(\overline{c}, \overline{d})}{\left| \overline{d} \right|}, \overline{d} = \left\| \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{matrix} \right\|,$$

$$(\overline{c}, \overline{d}) = 30 - 3 - 18 = 9, \left| \overline{d} \right| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

$$\text{pr}_{\overline{AB}}\, \overline{BC} = \frac{9}{\sqrt{54}}.$$

4) Маємо $\lambda = \dfrac{1}{3}, \overline{r}_M = \dfrac{\overline{r}_A + \lambda \overline{r}_B}{1 + \lambda}$. Отже,

$$x_M = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}, y_M = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4},$$

$$z_M = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}, M\left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{4}; \frac{21}{4} \right). \quad \bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. Обчислити скалярний добуток векторів $(\overline{a}, \overline{c})$, якщо $|\overline{a}| = 8, |\overline{c}| = 5$ та:
1) $(\widehat{\overline{a}, \overline{c}}) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$; 3) $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$.

❍ 1) 20; 2) 40; 3) −40. ●

Задача 7.2. Знайдіть кут φ між векторами:
1) $\overline{a} = (1; -1; -1), \overline{b} = (2; 0; 2)$;
2) $\overline{a} = (1; 3; 1), \overline{b} = (-2, 3, 0)$.

❍ 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos\frac{7}{\sqrt{143}}$. ●

Задача 7.3. Знайдіть вектор, колінеарний бісектрисі кута A трикутника ABC, якщо $\overline{AB} = (4;0;3)^T, \overline{AC} = (1;2;2)^T$.

❍ $(17;10;19)^T$. ●

Задача 7.4. Знайдіть $\overline{x} : \overline{x} \parallel \overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}$, $(\widehat{\overline{x}, \overline{j}}) < \frac{\pi}{2}, |\overline{x}| = 15$.

❍ $\overline{x} = -5\overline{i} + 10\overline{j} + 10\overline{k}$. ●

Задача 7.5. Задано: $\overline{a} = (2;-1;5)^T, \overline{b} = (3;1;1)^T$. Знайдіть $\overline{x} : (\overline{x}, \overline{k}) = 0$, $(\overline{x}, \overline{a}) = 1, (\overline{x}, \overline{b}) = 4$.

❍ $\overline{x} = (1;1;0)^T$. ●

Задача 7.6. Знайдіть $\overline{x} : \overline{x} \parallel \overline{a} = (1;1;4)^T, (\overline{x}, \overline{a}) = 3$.

❍ $\overline{x} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right)^T$. ●

Задача 7.7. Який кут утворюють одиничні вектори $\overline{s}$ та $\overline{t}$, якщо відомо, що вектори $\overline{p} = \overline{s} + 2\overline{t}$ та $\overline{q} = 5\overline{s} - 4\overline{t}$ — ортогональні?

❍ $\frac{\pi}{3}$. ●

Задача 7.8. Знайдіть $\alpha : \cos(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \nu$, якщо:

1) $\overline{p} = \overline{i} + 2\overline{j} + \alpha\overline{k}, \overline{q} = 3\overline{i} + \overline{j}, \nu = \frac{5}{12}$;

2) $\overline{p} = \overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k}, \overline{q} = 2\overline{i} - \overline{j} + \alpha\overline{k}, \nu = 0$.

❍ 1) $\alpha = \pm\sqrt{\frac{47}{5}}$; 2) $\alpha = -\frac{1}{2}$. ●

Задача 7.9. Знайдіть $\mathrm{pr}_{\overline{b}}\,\overline{a}$ та $\mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a} = (4;-3;2), \overline{b} = (1;1;1)$;

2) $\overline{a} = -4\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}, \overline{b} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$.

❍ 1) $\sqrt{3}, \frac{3}{\sqrt{29}}$; 2) $-\frac{10}{3}, -\frac{10}{\sqrt{33}}$. ●