Модуль 8. Векторне множення векторів

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення лівої та правої трійок векторів.
2. Що звуть векторним добутком двох векторів?
3. Сформулюйте властивості векторного добутку.
4. Сформулюйте критерій колінеарності векторів.
5. Який геометричний та фізичний зміст векторного добутку?
6. Що звуть мішаним добутком трьох векторів?
7. Який геометричний зміст мішаного добутку?
8. Сформулюйте властивості мішаного добутку.
9. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів та умови того, що вектори творять праву або ліву трійку.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 8.1. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q}$ та $\overline{b} = 3\overline{p} + 2\overline{q}$, якщо відомо, що $|\overline{p}| = 3,\ |\overline{q}| = 4, (\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

❍ $S_{\square} = \left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| = |[2\overline{p} - \overline{q}, 3\overline{p} + 2\overline{q}]| =$

$$= |6[\overline{p}, \overline{p}] - 3[\overline{q}, \overline{p}] + 4[\overline{p}, \overline{q}] - 2[\overline{q}, \overline{q}]| = |3[\overline{p}, \overline{q}] + 4[\overline{p}, \overline{q}]| =$$

$$= 7\left|[\overline{p}, \overline{q}]\right| = 7|\overline{p}||\overline{q}|\sin(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = 7 \cdot 3 \cdot 4 \sin\frac{\pi}{3} = 42\sqrt{3}. \ \bullet$$

Навчальна задача 8.2. Вектор $\overline{x}$ ортогональний до векторів $\overline{a} = (2; 3; -1)^T$ та $\overline{b} = (1; -1; 3)^T$, утворює з вектором $\overline{i}$ тупий кут. Знаючи, що $|\overline{x}| = \sqrt{138}$, знайти координати вектора $\overline{x}$.

❍1. Оскільки ненульовий вектор $\overline{x}$ ортогональний ненульовим векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, то він колінеарний їх векторному добутку: $\overline{x} = \lambda[\overline{a}, \overline{b}]$. Отже,

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8\overline{i} - 7\overline{j} - 5\overline{k} \Rightarrow$$

$$\overline{x} = \lambda[\overline{a}, \overline{b}] = 8\lambda\overline{i} - 7\lambda\overline{j} - 5\lambda\overline{k} = (8\lambda; -7\lambda; -5\lambda)^T.$$

2. Довжина вектора $\overline{x}$ дорівнює

$$|\overline{x}| = \sqrt{138\lambda^2} = \sqrt{138},$$

отже, $\lambda = \pm 1$.

3. Оскільки вектор $\overline{x}$ утворює тупий кут з вектором $\overline{i}$, то $\cos(\widehat{\overline{x}, \overline{i}}) < 0$, а, отже, $8\lambda < 0$, тобто $\lambda = -1$.

4. Шуканий вектор $\overline{x} = (-8;7;5)^T$. ●

Навчальна задача 8.3.

На векторах $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$ та $\overline{b} = 4\overline{i} + 6\overline{k}$ побудовано трикутник. Знайти його площу і висоту на бік, що збігається з вектором $\overline{a}$.

❍ Площу трикутнику можна обчислити за формулою

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|.$$

А висота трикутника дорівнює висоті паралелограма, побудованого на тих самих векторах. Отже,

$$h_{\overline{a}} = \frac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{|\overline{a}|}.$$

Знайдімо

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\overline{i} - 24\overline{j} + 8\overline{k}.$$

Звідси

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

Отже,

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14.$$

З того, що $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ випливає

$$h_{\overline{a}} = \frac{28}{\sqrt{13}}. \text{●}$$

Навчальна задача 8.4.

Знайти об'єм і висоту, опущену на основу, утворену векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$, паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\overline{a} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \overline{b} = \begin{Vmatrix} 9 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix}; \overline{c} = \begin{Vmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{Vmatrix}.$$

❍ $S_{\square} = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$. Знайдімо

$$[\overline{a},\overline{b}\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k};$$

$$\left|[\overline{a},\overline{b}\,]\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}.$$

$$V_{\text{пар}} = \left|([\overline{a},\overline{b}\,],\overline{c}\,)\right| = \left|(-\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}, 11\overline{i} + 7\overline{j} - 15\overline{k})\right| =$$

$$= |-11 - 21 + 60| = 28.$$

$$h = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\square}} = \frac{28}{\sqrt{26}}. \ \bullet$$

Навчальна задача 8.5. З'ясувати, для яких значень параметра α вектори $\overline{a} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k}, \overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}, \overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} + \alpha\overline{k}$: 1) компланарні; 2) творять праву трійку; 3) творять ліву трійку.

❍Знайдімо мішаний добуток векторів:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\,) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(\alpha + 2) - 5(\alpha + 1) + 7 = 6 - 3\alpha.$$

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарні, якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\,) = 6 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2$.

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ творять праву трійку, якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\,) = 6 - 3\alpha > 0 \Rightarrow \Rightarrow \alpha < 2$.

Вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ творять ліву трійку, якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\,) = 6 - 3\alpha < 0 \Rightarrow \Rightarrow \alpha > 2$.●

Навчальна задача 8.6. Силу $\overline{F} = \overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ прикладено до точки $A(1;2;3)$. Знайти момент цієї сили щодо точки $O(3;2;-1)$.

❍Знайдімо вектор

$$\overline{OA} = (1-3)\overline{i} + (2-2)\overline{j} + (3+1)\overline{k} = -2\overline{i} + 4\overline{k}.$$

З фізичного змісту векторного добутку маємо

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = [\overline{OA},\overline{F}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 12\overline{j} + 4\overline{k}.\bullet$$

Навчальна задача 8.7. Задано вектори $\overline{a} = 4\overline{i} + 4\overline{k}, \overline{b} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$ та $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j}$. Потрібно: 1) обчислити мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $5\overline{c}$; 2) знайти довжину векторного добутку векторів $3\overline{c}$ та $\overline{b}$; 3) обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $3\overline{b}$; 4) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональні вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$; 5) перевірити, чи будуть компланарні вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$.

❍ 1) Оскільки $5\overline{c} = 15\overline{i} + 25\overline{j}$, то

$$(\overline{a}, \overline{b}, 5\overline{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480.$$

2) Оскільки $3\overline{c} = 9\overline{i} + 15\overline{j}$, то

$$[3\overline{c}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\overline{i} + 27\overline{k} + 15\overline{k} - 18\overline{j} =$$

$$= 30\overline{i} - 18\overline{j} + 42\overline{k},$$

$$\left|[3\overline{c}, \overline{b}]\right| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988}.$$

3) Знайдімо:

$$3\overline{b} = -3\overline{i} + 9\overline{j} + 6\overline{k}, (\overline{a}, 3\overline{b}) = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12.$$

4) Оскільки $\overline{a} = (4; 0; 4)^T, \overline{b} = (-1; 3; 2)^T$ та $\dfrac{4}{-1} \neq \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{4}{2}$, то вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ не колінеарні. Оскільки

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

то вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ не ортогональні.

5) Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, якщо $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$. Обчислімо

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -96 \neq 0,$$

тобто вектори $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ не компланарні. ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні, $|\overline{a}| = 3, \left|\overline{b}\right| = 4$. Обчислити $\left|[3\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} - 2\overline{b}]\right|$.

❍ 60. ●

Задача 8.2. Задано вектори $\overline{a} = (3; -1; -2)^T, \overline{b} = (1; 2; -1)^T$. Знайти координати вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$.

❍ $(5; 1; 7)^T$. ●

Задача 8.3. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами в точках $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$.

❍ $2\sqrt{13}$. ●

Задача 8.4. Силу $\overline{F}=(2;-4;3)^T$ прикладено до точки $A(1;5;-2)$. Знайти момент цієї сили щодо точки $B(5;-3;4)$.

❍ $\overline{0}$. ●

Задача 8.5. Задано вершини піраміди $A(2;0;4), B(0;3;7), C(0;0;6)$, $D(4;3;5)$. Обчислити її об'єм і висоту h, спущену на грань ACD.

❍ $V=2, h=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. ●

Задача 8.6. З'ясуйте, чи лежать точки $A(1;2;-1), B(4;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3)$ в одній площині?

❍ Так, точки лежать в одній площині. ●

Задача 8.7. З'ясуйте, чи компланарні вектори:

1) $\overline{a}=\begin{Vmatrix}2\\3\\1\end{Vmatrix}, \overline{b}=\begin{Vmatrix}1\\-1\\3\end{Vmatrix}, \overline{c}=\begin{Vmatrix}-1\\9\\-11\end{Vmatrix};$

2) $\overline{a}=\begin{Vmatrix}3\\-2\\1\end{Vmatrix}, \overline{b}=\begin{Vmatrix}2\\1\\2\end{Vmatrix}, \overline{c}=\begin{Vmatrix}3\\-1\\-2\end{Vmatrix}.$

❍ 1) Компланарні; 2) не компланарні. ●

Задача 8.8. З'ясуйте, правою чи лівою є трійка векторів $\overline{a}=\begin{Vmatrix}3\\4\\0\end{Vmatrix}, \overline{b}=\begin{Vmatrix}0\\-4\\1\end{Vmatrix}, \ \overline{c}=\begin{Vmatrix}0\\2\\5\end{Vmatrix}$?

❍ Ліва трійка. ●