Модуль 9. Комплексні числа

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Що звуть комплексним числом?
2. Як записують комплексні числа в алгебричній, тригонометричній та показниковій формі?
3. Наведіть означення дій над комплексними числами в алгебричній та тригонометричній формах.
4. Як зображають комплексні числа?
5. Які алгебричні дії з комплексними числами простіші в алгебричній, а які — в тригонометричній формі?
6. Запишіть формулу Муавра.
7. Запишіть формулу для добування кореня з комплексного числа.
8. Запишіть формулу Ейлера.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 9.1. Знайти $z_1 + z_2, z_1 z_2, z_2 - z_1, \dfrac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 3 - 2i$.

❍ $z_1 + z_2 = 7 + 3i$; $z_1 - z_2 = 1 + 7i$;

$$z_1 z_2 = (4 + 5i)(3 - 2i) = 12 + 15i - 8i + 10 = 22 + 7i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{2}{13} + \frac{23}{13} i. \bullet$$

Навчальна задача 9.2. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i.$$

❍$(2x + y) + (x + 3y)i = 3 - i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$ ●

Навчальна задача 9.3. Зобразити у тригонометричній та показникових формах число: 1) $z = -1 + i$; 2) $1 + \cos 2 + i \sin 2$.

❍1) Число записано в алгебричній формі. Для аргументу комплексного числа скористаємось формулами (9.3).

$$\operatorname{Re} z = x = -1 < 0, \operatorname{Im} z = y = 1 > 0;$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4};$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right) \equiv \sqrt{2} e^{i3\pi/4}.$$

2) $\operatorname{Re} z = 1 + \cos 2 > 0, \operatorname{Im} z = \sin 2 > 0.$

$$|z| = \sqrt{(1+\cos 2)^2 + \sin^2 2} = \sqrt{2 + 2\cos 2} = \sqrt{4\cos^2 1} = 2\cos 1.$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sin 2}{1+\cos 2} = \operatorname{arctg}\frac{2\sin 1\cdot\cos 1}{2\cos^2 1} = \operatorname{arctg}\operatorname{tg} 1 = 1.$$

$$z = 2\cos 1\cdot(\cos 1 + i\sin 1) = 2\cos 1\cdot e^{i}. \bullet$$

Навчальна задача 9.4. Знайти алгебричну форму числа: 1) $(-1-i\sqrt{3})^{12}$; 2) $((1+i\sqrt{3})(2-2i))^4$; 3) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{10}$.

❍ 1) Запишімо число $z = -1-i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі:

$$x = -1, y = -\sqrt{3}, z \in \text{III} \text{ чверті} \Rightarrow$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$-1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Скориставшись формулою Муавра, маємо:

$$z^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{12}(\cos 16\pi + i\sin 16\pi) = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12} = 4096.$$

2) Запишімо числа $z_1 = 1+i\sqrt{3}, z_2 = 2-2i$ у тригонометричній формі.

$$\operatorname{Re} z_1 = 1 > 0, \operatorname{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0;$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2;\ \varphi_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\operatorname{Re} z_2 = 2 > 0, \operatorname{Im} z_2 = -2 < 0;$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4};$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Тоді

$$z_1 z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Отже, за формулою Муавра маємо

$$((1+i\sqrt{3})(2-2i))^4 = \left(4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^4 =$$
$$= (4\sqrt{2})^4\left(\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12}\right) = 1024\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 1024\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512+512\sqrt{3}i.$$

3) Користуючись результатом попереднього пункту, маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{10} = \frac{1}{32}\left(\cos\frac{70\pi}{12}+i\sin\frac{70\pi}{12}\right) =$$
$$= \frac{1}{32}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{i}{64}. \bullet$$

Навчальна задача 9.5. Знайти всі значення коренів і зобразіть їх на комплексній площині: 1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[5]{i}$.

❍ 1) Оскільки $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то

$$\sqrt[4]{-1} = \omega_k = \cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}, k = 0,1,2,3:$$

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\omega_2 = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\omega_3 = \cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Зобразімо одержані значення на комплексній площині (рис. 9.11).

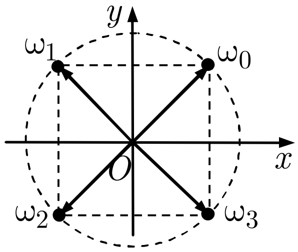

Рис. 9.11

❍ 2) $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 1 > 0.$

$$|z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1;\ \arg z = \frac{\pi}{2}.$$

$$\omega_k = \sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right), k = 0,1,2,3,4 \text{ (рис. 9.12).}$$

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10};$$
$$\omega_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};$$
$$\omega_2 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10};$$
$$\omega_3 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10};$$
$$\omega_4 = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10} = \cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right). \bullet$$

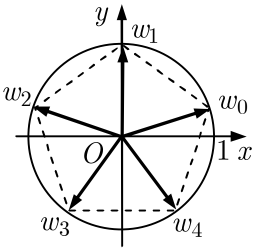

Рис. 9.12

Навчальна задача 9.6. Зобразити на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умову:

1) $|z-1| = 2$; 2) $|z+i| = |z-i|$;

3) $(|z| \le 1) \wedge (\frac{\pi}{3} < \arg z \le \frac{\pi}{2})$.

❍ 1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 2\}$ — множина точок, віддалених від точки $z = 1$ на відстань 3 — коло з центром у точці $z = 1$ і радіусом 2 (рис. 9.13).

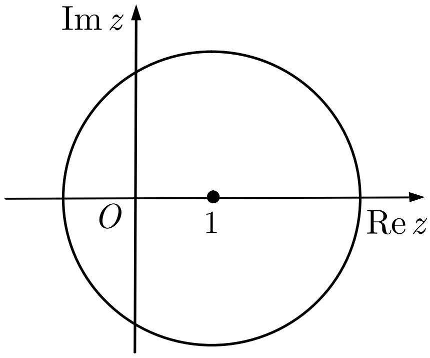

Рис. 9.13

2) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = |z-i|\}$— множина точок, рівновіддалених від точок $z_1 = -i$ та $z_2 = i$ — пряма, яка перпендикулярна до відрізка $z_1 z_2$ і проходить через його середину (рис. 9.14).

Розв'яжімо задачу аналітично. Нехай $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2};$$
$$|z-i| = |x+i(y-1)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$
$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow y=0.$$

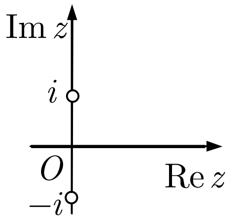

Рис. 9.14

3) $\left\{ z\in\mathbb{C} \mid (\left|z\right| \le 1) \wedge (\frac{\pi}{3} < \arg z \le \frac{\pi}{2}) \right\}$ – множина точок $\mathbb{C}$, розташованих усередині круга з межею $|z|=1$: $x^2+y^2=1$ між променями $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ та $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 9.15). ●

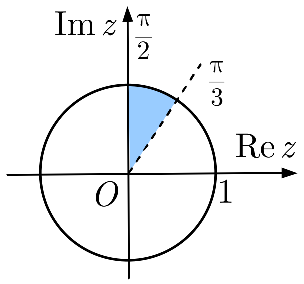

Рис. 9.15

Навчальна задача 9.7. Розв'язати рівняння $(z\in\mathbb{C})$ $z^3+z-2=0$.

❍ Число $z=1$ — корінь рівняння. Справді, за схемою Горнера маємо

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}.$$

$$(z-1)(z^2+z+2)=0 \Leftrightarrow (z_1=1) \vee (z^2+z+2=0).$$
$$z^2+z+2=0.$$
$$D = 1-8=-7 \Rightarrow z_{2,3} = \frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2},$$
$$\sqrt{-7} = \sqrt{7(\cos\pi + i\sin\pi)} =$$
$$= \sqrt{7}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right), k=0,1.$$
$$z_1 = 1, z_{2,3} = \frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}.●$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.1. Знайдіть $z_1+z_2, z_1z_2, z_2-z_1, \dfrac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

❍ $z_1+z_2=2\sqrt{2}, z_1z_2=5, z_2-z_1=2\sqrt{3}i, \dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}i.$ ●

Задача 9.2. Знайдіть дійсні розв'язки рівняння
$$2x-5i+7y+2xi=-7-5i.$$

❍ $x=0, y=-1.$ ●

Задача 9.3. Зобразіть у тригонометричній та показниковій формах комплексні числа:
1) $\sin\varphi+i\cos\varphi$;

2) $1-i\operatorname{tg}\alpha, \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$;

3) $5\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}-i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

❍ 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$.

2) $-\dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha))=-\dfrac{1}{\cos\alpha}e^{i(\pi-\alpha)}$.

3) $5\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. ●

Задача 9.4. Знайдіть алгебричну форму числа $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-2+2i}\right)^{60}$.

❍ $-\dfrac{1}{2^{30}}$. ●

Задача 9.5. Знайдіть усі значення коренів і зобразіть їх на комплексній площині:

1) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 3) $\sqrt[4]{-16}$.

❍ 1) $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}i, \omega_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$.

2) $\omega_k=\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi k}{3}\right)\right), k=0,1,2.$

3) $\omega_k=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}\right)+i\sin\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}\right)\right), k=\overline{0,3}.$ ●

Задача 9.6. Зобразіть на площині $\mathbb{C}$ множини точок, що справджують умову: 1) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$; 2) $0\le \operatorname{Im} z<\operatorname{Re} z<2$.

❍ 1) Рис. 9.16. 2) Рис. 9.17. ●

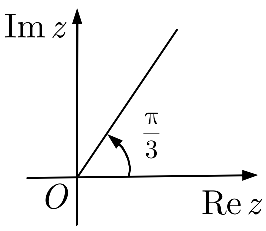

Рис. 9.16

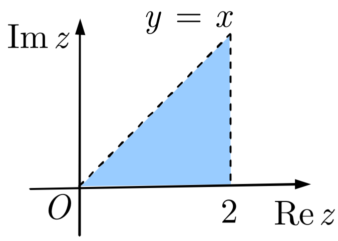

Рис. 9.17

Задача 9.7. Розв'яжіть рівняння $(z \in \mathbb{C})$:

1) $z^2 + 4z + 5 = 0$;

2) $z^2 - 8z + 17 = 0$;

3) $2z^3 + z^2 + 1 = 0$.

❍ 1) $z_{1,2} = -2 \pm i$;

2) $z_{1,2} = 4 \pm i$;

3) $z_1 = -1, z_{2,3} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} i$. ●