

# Модуль 10. Системи координат. Рівняння ліній і поверхонь

## Практична частина

### 1. Контрольні запитання

1. Опишіть полярну систему координат. Чи є відображення «точка»  $\rightarrow$  «полярні координати» взаємно однозначним?
2. Вкажіть зв'язок між полярними та Декартовими координатами точки на координатній площині.
3. Опишіть циліндричну і сферичну системи координат.
4. Вкажіть зв'язок між сферичними (циліндричними) та Декартовими координатами у просторі.
5. Наведіть означення рівняння лінії  $L$  у заданій системі координат на площині. Чи залежить вигляд рівняння лінії від вибору системи координат?
6. Які рівняння ліній і поверхні звать параметричними?
7. Сформулюйте означення рівняння поверхні  $S$  у просторі. У чому полягає відмінність між рівнянням поверхні і рівнянням лінії у просторі.
8. Які два основних типи задач, пов'язаних з аналітичним задаванням ліній і поверхні, Ви знаєте?

### 2. Навчальні задачі

#### Навчальна задача 10.1.

Координати точок  $A(\sqrt{3};1)$ ,  $B(-1;1)$  задано у ПДСК. Знайти координати точок у полярній системі, узгодженій із ПДСК.

О Декартові координати точки  $A$  дорівнюють  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = 1$ . Оскільки точка  $A$  лежить у 1-й чверті, тоді

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Отже, в полярній системі точка  $A\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ .

Декартові координати точки  $B$  дорівнюють  $x = -1$ ,  $y = 1$ . Оскільки точка  $B$  лежить у 2-й чверті ПДСК, то

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Отже, в полярній системі точка  $B\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ . ●

#### Навчальна задача 10.2.

Знайдіть Декартові координати точки  $C\left(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ ,

якщо полюс зливається з початком координат, а полярна вісь — з додатним напрямом осі абсцис.

○ Маємо полярні координати точки  $C$ :  $\rho = 2\sqrt{2}$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Тоді Декартові координати

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = -2, \\ y = \rho \sin \varphi = 2\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} = 2. \end{cases}$$

Отже, у ПДСК точка  $C(-2; 2)$ . ●

**Навчальна**

**задача 10.3.**

Знайдіть сферичні координати точки  $A(0; -4; 3)$ .

○ Декартові координати точки  $A$ :  $x = 0$ ,  $y = -4$ ,  $z = 3$ . Знайдемо сферичні координати точки  $A$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\varphi : \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{0}{\sqrt{16}} = 0, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{16}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \arccos \frac{3}{5}.$$

Отже, у сферичній системі точка  $A\left(5; -\frac{\pi}{2}; \arccos \frac{3}{5}\right)$ . ●

**Навчальна**

**задача 10.4.**

Знайдіть циліндричні координати точки  $B(1; -1; -1)$ .

○ Декартові координати точки  $B$ :  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z = -1$ . Знайдемо циліндричні координати точки  $B$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi : \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4};$$

$$z = -1.$$

Отже, в циліндричній системі точка  $B\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}; -1\right)$ . ●

### 3. Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 10.1.**

Знайдіть полярні координати точок, заданих в узгодженій з полярною прямокутній Декартовій системі коор-

динат:  $A(0; 3), B(-3; 0), C(-1; 1), D(-1; \sqrt{3})$ .

$$\circ A\left(3; \frac{\pi}{2}\right), B(3; \pi), C\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right), D\left(2; \frac{2\pi}{3}\right). \bullet$$

**Задача 10.2.**

Знайдіть Декартові координати точок, заданих в узгодженій з Декартовою полярній системі координат:

$$A(2; \pi), B\left(2; \frac{\pi}{6}\right), C\left(3; \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\circ A(-2; 0), B(\sqrt{3}; 1), C\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right). \bullet$$

**Задача 10.3.**

Знайдіть сферичні координати точок, заданих в узгодженій із сферичною Декартовій системі:

$$A(2; -2; 1), B(3; -4; 5).$$

$$\circ A\left(3; -\frac{\pi}{4}; \arccos \frac{1}{3}\right), B\left(5\sqrt{2}; -\arctg \frac{4}{3}; \frac{\pi}{4}\right). \bullet$$

**Задача 10.4.**

Знайдіть координати точок у циліндричній системі, заданих в узгодженій з нею Декартовій системі:

$$A(2; -2; 1), B(3; -4; 5).$$

$$\circ A\left(2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}; 1\right), B\left(5; -\arctg \frac{4}{3}; 5\right). \bullet$$