Модуль 11. Геометрія прямої і площини

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Що звуть прямою?
2. Що звуть напрямним вектором прямої?
3. Вкажіть зв'язок між канонічними рівняннями прямої та її параметричними рівняннями у просторі.
4. Що звуть площиною?
5. Що звуть нормальним вектором площини?
6. Вкажіть зв'язок між загальним рівнянням площини і будь-яким лінійним рівнянням у ПДСК.
7. Як розташована площина щодо ПДСК, якщо в її загальному рівнянні дорівнюють нулеві:

1) один з коефіцієнтів при змінних x, y або z;

2) вільний член;

3) два коефіцієнти при змінних x, y або z?

8. Запишіть рівняння площини у відрізках. Який геометричний зміст мають параметри цього рівняння?
9. З'ясуйте зв'язок між нормованим рівнянням площини та її загальним рівнянням.
10. Запишіть усі форми рівняння прямої на площині. Що звуть кутовим коефіцієнтом прямої на площині?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 11.1.

Задано пряму $L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{-5}$. Знайти координати напрямного вектора $\overline{s}$ і точку M_0, що належить прямій

❍ Задані рівняння є канонічними рівняннями прямої. Отже, числа, що стоять у знаменниках дробів — це координати напрямного вектора прямої $\overline{s} = (2; 3; -5)^T$.

Точка M_0, через яку проходить пряма, має координати $M_0(1; 2; 4)$. ●

Навчальна задача 11.2.

Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(\overline{r_0})$ паралельно векторові $\overline{a} \neq \overline{0}$. Розв'язати задачу:

1) в загальному вигляді;

2) для $M_0(1; -1; 0), \overline{a} = (-2; 5; -6)^T$.

❍ 1) Запишімо стисло загальний розв'язок задачі (рис. 11.13).

$$\begin{cases} L \parallel \overline{a} \Rightarrow \overline{a} = \overline{s}(L), \\ M(\overline{r}) \in L(M_0; \overline{a}) \end{cases} \Rightarrow L : \overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a}, t \in \mathbb{R}.$$

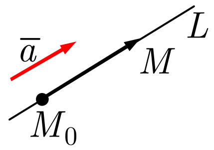

Рис. 11.13

2) За напрямний вектор шуканої прямої можна взяти ненульовий вектор $\overline{a}$. Нехай точка $M(\overline{r}) \in L$. Тоді

$$\overline{r} - \overline{r}_0 = \begin{Vmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{Vmatrix} \text{ колінеарний } \overline{a} = \begin{Vmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-6} = t \Leftrightarrow$$

$$L : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{a}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -6t, \end{cases} \bullet$$

Навчальна задача 11.3. Записати канонічні і параметричні рівняння прямої L, яка проходить через точки $M_1(3;3;3), M_2(4;5;6)$.

❍ За напрямний вектор шуканої прямої L можна взяти вектор

$$\overline{s}(L) = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Нехай точка $M(\overline{r}) \in L$. Тоді (див. *Навчальна задача 11.2*)

$$\overline{r} - \overline{r}_1 = \begin{Vmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-3 \end{Vmatrix} \text{колінеарний } \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{3} = t;$$

$$L : \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 3t, \end{cases} \bullet$$

Навчальна задача 11.4. Знайти нормальний вектор площини $3x-2y+5z-1=0$.

❍Задане рівняння є загальним рівнянням площини. Отже, коефіцієнти при змінних є координатами нормального вектора цієї площини:

$$\overline{n}=\begin{Vmatrix}3\\-2\\5\end{Vmatrix}.●$$

Навчальна задача 11.5. Записати рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(\overline{r}_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{a}\neq\overline{0}$.
Розв'язати задачу:
1) в загальному вигляді;
2) для $M_0(1;-3;2),\overline{a}=(4;0;5)^T$.

❍1) Запишімо стисло загальний розв'язок задачі (рис. 11.14).

$$\begin{cases}\overline{a}\perp P\Leftrightarrow\overline{a}=\overline{n}(P);\\ M(\overline{r})\in P(M_0;\overline{a})\end{cases}\Rightarrow\overline{r}-\overline{r}_0\perp\overline{a}\Leftrightarrow P:(\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{a})=0.$$

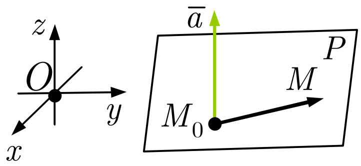

Рис. 11.14

2) Оскільки вектор $\overline{a}$ перпендикулярний до площини P, то його можна взяти за нормальний вектор площини $P:\overline{n}(P)=\overline{a}$.

Нехай точка $M(\overline{r})=M(x;y;z)\in P$. Оскільки точка $M_0(r_0)=M_0(1;-3;2)\in P$, то

$$\overline{r}-\overline{r}_0=\begin{Vmatrix}x-1\\y+3\\z-2\end{Vmatrix}\text{ ортогональний }\overline{a}=\begin{Vmatrix}4\\0\\5\end{Vmatrix}\Leftrightarrow(\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{a})=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)+0(y+3)+5(z-2)=0\Leftrightarrow$$

$$P:4x+5z-14=0.●$$

Навчальна задача 11.6. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(\overline{r}_0)$ компланарно двом неколінеарним векторам $\overline{u}$ та $\overline{v}$. Розв'язати задачу:
1) в загальному вигляді;
2) для $M_0(2;0;-5),\overline{u}=(1;2;0)^T,\overline{v}=(0;-1;3)^T$.

❍1) Запишімо стисло загальний розв'язок задачі (рис. 11.15).

$$M(\overline{r})\in P\Rightarrow\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{u},\overline{v}-\text{компланарні}\Leftrightarrow P:(\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{u},\overline{v})=0.$$

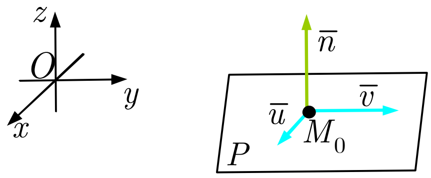

Рис. 11.15

Зауваження 11.3. За нормальний вектор площини P можна взяти вектор $\overline{n}(P) = [\overline{u}, \overline{v}]$.

2) Вектори $\overline{u}$ та $\overline{v}$ — не колінеарні, бо $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{0}{3}$.

Нехай точка $M(\overline{r}) = M(x; y; z) \in P$. Оскільки точка $M_0(\overline{r_0}) = M_0(2; 0; -5) \in P$, то вектори

$$\overline{r} - \overline{r_0} = \left\|\begin{matrix} x-2 \\ y \\ z+5 \end{matrix}\right\|, \overline{u} = \left\|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right\|, \overline{v} = \left\|\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}\right\| \text{ — компланарні} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{u}, \overline{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z+5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot 6 - y \cdot 3 + (z+5) \cdot (-1) = 0;$$

$$P : 6x - 3y - z - 17 = 0. \bullet$$

Навчальна задача 11.7. Записати рівняння площини P, що проходить через пряму $L : \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+3}{8} = \dfrac{z}{-1}$ паралельно векторові $\overline{a} = (1; 0; 3)^T$.

❍З рівняння прямої L випливає, що точка $M_0(1; -3; 0) \in P$ і напрямний вектор $\overline{s}(L) = (-3; 8; -1)^T \parallel P$. Вектори $\overline{s}$ та $\overline{a}$ — неколінеарні, бо $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{8}{0}$.

Нехай точка $M(\overline{r}) \in P$. Площину P, яка проходить через точку M_0 компланарно не колінеарним векторам $\overline{a}$ та $\overline{s}$ задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.6*)

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{a}, \overline{s}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot (-24) - (y+3) \cdot 8 + z \cdot 8 = 0;$$

$$-24x - 8y + 8z = 0;$$

$$P : 3x + y - z = 0. \bullet$$

Навчальна задача 11.8. Записати рівняння площини P, що проходить через точки $M_1(2;-1;3), M_2(1;1;1)$ паралельно векторові $\overline{a} = (7;4;0)^T$.

❍Вектори

$$\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \left\|\begin{matrix} 1-2 \\ 1-(-1) \\ 1-3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right\| \text{ та } \overline{a} = \left\|\begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right\|$$

— неколінеарні, бо $-\dfrac{1}{7} \neq \dfrac{2}{4}$.

Нехай точка $M(\overline{r}) \in P$. Площину P, яка проходить через точку M_1 компланарно векторам $\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$ та $\overline{a}$ задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.6*)

$$(\overline{r} - \overline{r}_1, \overline{r}_2 - \overline{r}_1, \overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 8 - (y+1)\cdot 14 + (z-3)\cdot(-18) = 0;$$

$$8x - 14y - 18z + 24 = 0;$$

$$P : 4x - 7y - 9z + 12 = 0. \text{ ●}$$

Навчальна задача 11.9. Записати рівняння площини P, що проходить через три різні точки $M_1(2;3;1), M_2(-1;2;5), M_3(3;0;1)$.

❍ Вектори

$$\overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \overline{M_1M_2} = \left\|\begin{matrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{matrix}\right\| \text{ та } \overline{r}_3 - \overline{r}_1 = \overline{M_1M_3} = \left\|\begin{matrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{matrix}\right\|$$

— неколінеарні, бо $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{-1}{-3}$ (тобто точки M_1, M_2, M_3 не лежать на одній прямій).

Нехай $M(\overline{r}) \in P$. Площину P, яка проходить через точку M_1 компланарно векторам $\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$ та $\overline{M_1M_3} = \overline{r}_3 - \overline{r}_1$, задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.6*)

$$(\overline{r}-\overline{r}_1, \overline{r}_2-\overline{r}_1, \overline{r}_3-\overline{r}_1)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 12-(y-3)(-4)+(z-1)\cdot 10=0;$$

$$P: 6x+2y+5z-23=0. \bullet$$

Навчальна задача 11.10. Знайти рівняння площини у відрізках і зобразити площину в ПДСК, якщо її загальне рівняння $3x-6y+4z-12=0$.

❍ Перетворімо рівняння площини:

$$3x-6y+4z=12 \Leftrightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1.$$

Дістали рівняння площини у відрізках, з якого випливає, що площина перетинає осі координат у точках $A(4;0;0), B(0;-2;0)$ та $C(0;0;3)$ (рис. 11.16). ●

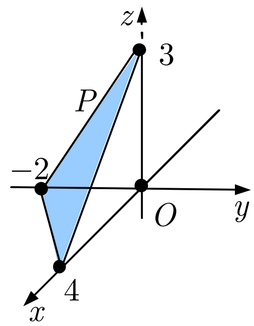

Рис. 11.16

Навчальна задача 11.11. З'ясуйте, чи є рівняння площини нормованим. Якщо ні, то зведіть його до нормованого вигляду:
1) $4x-6y-12z-11=0$;
2) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$.

❍ У нормованому рівнянні коефіцієнти при x, y та z є координатами одиничного нормального вектора, а вільний член має бути від'ємним.

1) $-11<0; \left|(4;-6;-12)^T\right|=\sqrt{16+36+144}=\sqrt{196}=14 \neq 1.$

Рівняння не є нормоване, оскільки нормальний вектор площини не одиничний. Знормуємо рівняння, помноживши його на $\mu=\frac{1}{14}$:

$$\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0.$$

2) $3>0; \left|\left(\frac{3}{7};-\frac{6}{7};\frac{2}{7}\right)^T\right|=\frac{\sqrt{9+36+4}}{7}=\frac{\sqrt{49}}{7}=1.$

Рівняння не є нормоване, оскільки вільний член додатний. Знормуємо його, помноживши на $\mu=-1$:

$$-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0. \bullet$$

Навчальна задача 11.12.

Задано точки $A(-1;-3), B(2;4), C(3;-1)$. У трикутнику ABC записати:

1) рівняння у відрізках медіани AM;

2) нормоване рівняння висоти CD.

❍ 1) Знайдімо координати точки M — середини відрізка BC (рис. 11.17):

$$x_M = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}; y_M = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right).$$

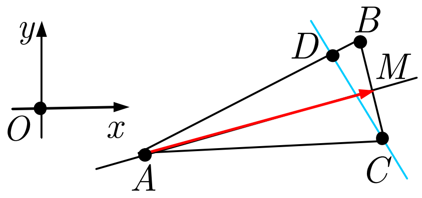

Рис. 11.17

Вектор $\overline{AM} = \left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)^T$ є напрямним вектором медіани. Запишімо канонічне рівняння прямої AM (11.14)

$$\frac{x+1}{7/2} = \frac{y+3}{9/2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{7} = \frac{y+3}{9}.$$

Перетворімо це рівняння, щоб одержати рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{7} - \frac{y}{9} = \frac{4}{21} \Leftrightarrow \frac{3x}{4} - \frac{7y}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{4/3} + \frac{y}{-12/7} = 1.$$

2) Вектор $\overline{AB} = (3;7)^T$ є нормальним вектором прямої CD. Отже, запишімо рівняння (11.15) прямої, що проходить через точку $C(3;-1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{AB} = (3;7)^T$:

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = 0 \Leftrightarrow 3(x-3) + 7(y+1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 7y - 2 = 0.$$

Одержане рівняння є загальним рівнянням висоти CD. Знормуємо його, помноживши на множник

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3^2+7^2}} = \frac{1}{\sqrt{58}}:$$

$$\frac{3}{\sqrt{58}}x + \frac{7}{\sqrt{58}}y - \frac{2}{\sqrt{58}} = 0. \bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 11.1.

Запишіть канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;0;5)$ паралельно:

1) векторові $\overline{a} = (2;-3;5)^T$;

2) осі Ox;

3) осі Oy.

❍ 1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{5}$; 2) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-5}{0}$; 3) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{0}$.
●

Задача 11.2. Запишіть канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки:
1) $A(1;-2;1), B(3;1;-1)$;
2) $C(0;-2;3), D(3;-2;1)$.

❍ 1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$; 2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{-2}$. ●

Задача 11.3. Знайдіть нормальний вектор площини:
1) $-x+2y-7z+5=0$;
2) $3x+z-11=0$.

❍ 1) $\overline{n}_1=(-1;2;-7)^T$; 2) $\overline{n}_2=(3;0;1)^T$. ●

Задача 11.4. Запишіть рівняння площини, що проходить через:
1) точку $M_1(-5;2;-1)$ паралельно площині Oyz;
2) точки $M_1(7;2;-3), M_2(5;6;-4)$ паралельно осі Ox;
3) точку $M_0(3;4;-5)$ паралельно векторам $\overline{a}=(3;1;-1)^T, \overline{b}=(1;-2;1)^T$.

❍ 1) $x+5=0$; 2) $y+4z+10=0$; 3) $x+4y+7z+16=0$. ●

Задача 11.5. Знайдіть об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x-3y-4z-24=0$ та координатними площинами.

❍ $V=96$. ●

Задача 11.6. Запишіть нормоване рівняння площини:
1) $5y-12z+26=0$;
2) $x+\sqrt{2}y+z-10=0$.

❍ 1) $-\dfrac{5}{13}y+\dfrac{12}{13}z-2=0$; 2) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+\dfrac{1}{2}z-5=0$. ●

Задача 11.7. Нехай $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$ — вершини трикутника. Запишіть рівняння перпендикуляра, який спущено з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

❍ $4x+y-3=0$. ●

Задача 11.8. Задано загальне рівняння прямої $12x-5y-65=0$. Запишіть для цієї прямої:
1) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
2) рівняння у відрізках;
3) нормоване рівняння.

❍ 1) $y=\dfrac{12}{5}x-13$; 2) $\dfrac{x}{65/12}+\dfrac{y}{-13}=1$; 3) $\dfrac{12}{13}x-\dfrac{5}{13}y-5=0$. ●