Модуль 12. Задачі на прямі і площини

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Які прямі звуть мимобіжними? Наведіть критерій мимобіжності двох прямих у просторі.
2. Сформулюйте означення жмутка площин і запишіть його рівняння.
3. Яким чином можуть бути розташовані у просторі пряма і площина? Запишіть загальні рівняння прямої у просторі.
4. Наведіть критерії паралельності і перпендикулярності прямої та площини у просторі.
5. Опишіть взаємне розташування двох прямих на координатній площині. Як пов'язані коефіцієнти загальних рівнянь цих прямих у кожному з випадків?
6. Що звуть кутом між двома прямими і двома площинами?
7. Що звуть віддалю від точки M до прямої L? Наведіть формулу віддалі від точки до прямої (на площині й у просторі)
8. Що звуть віддалю від точки M до площини P? Наведіть формулу віддалі від точки до площини.
9. У чому полягає відмінність між віддалю і відхиленням точки M_0 від площини P? Який геометричний зміст має відхилення?
10. Наведіть формули знаходження віддалі між прямими у просторі в різних випадках.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 12.1. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(2;-1;1)$ паралельно площині $P_1: x-4y+5z-1=0$ (рис. 12.24).

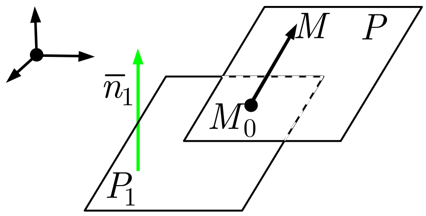

Рис. 12.24

❍ Оскільки площина $P \parallel P_1$, то за нормальний вектор площини P можна взяти нормальний вектор площини P_1:

$$\overline{n}(P)=\overline{n}_1(P_1)=\begin{Vmatrix}1\\-4\\5\end{Vmatrix}.$$

Нехай точка $M(\overline{r}) \in P$. Площину P, що проходить через точку $M_0(\overline{r_0})$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}_1$ задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.5*)

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{n}_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1(x-2) - 4(y+1) + 5(z-1) = 0;$$

$$P: x - 4y + 5z - 11 = 0. \bullet$$

Навчальна задача 12.2. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(1;-1;0)$ перпендикулярно до прямої $L: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ (рис. 12.25).

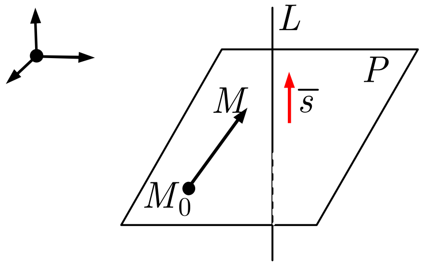

Рис. 12.25

❍Оскільки площина $P \perp L$, то за нормальний вектор площини P можна взяти напрямний вектор прямої L:

$$\overline{n}(P) = \overline{s}(L) = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Нехай точка $M(\overline{r}) \in P$. Площину P, що проходить через точку $M_0(\overline{r_0})$ перпендикулярно до вектора $\overline{s}$ задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.5*)

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{s}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1(x-1) - 2(y+1) + 3z = 0;$$

$$P: x - 2y + 3z - 3 = 0. \bullet$$

Навчальна задача 12.3. Записати рівняння площини P, яка проходить через пряму $L_1: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 4t, \\ z = -t + 1, \end{cases}$ паралельно прямій $L_2: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ (рис. 12.26).

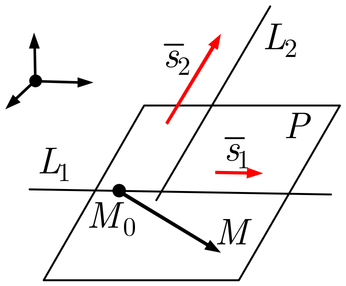

Рис. 12.26

❍З рівнянь прямих L_1 та L_2 випливає, що точка $M_1(2;0;1) \in P$ та напрямні вектори прямих

$$\overline{s}_1(L_1) = \begin{Vmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad \overline{s}_2(L_2) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Вектори $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ — неколінеарні, бо $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{-1}{2}$.

Нехай $M(\overline{r}) \in P$. Площину P, яка проходить через точку M_1 компланарно векторам $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.6*)

$$(\overline{r} - \overline{r}_1, \overline{s}_1, \overline{s}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 9 - y\cdot(-6) + (z-1)\cdot(-3) = 0;$$

$$P: 9x + 6y - 3z - 15 = 0. \bullet$$

Навчальна задача 12.4. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(7;-3;1)$ паралельно прямій $L_1 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{3} = \dfrac{z-1}{0}$ (рис. 12.27).

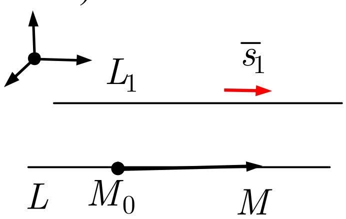

Рис. 12.27

❍З рівняння прямої L_1 випливає, що напрямний вектор $\overline{s}_1(L_1) = (-2;3;0)^T$.

Оскільки пряма L паралельна прямій L_1, то за її напрямний вектор можна взяти напрямний вектор прямої L_1 :

$$\overline{s}(L) = \overline{s}_1 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Нехай точка $M(\overline{r}) \in L$. Тоді (див. *Навчальна задача 11.2*)

$$\overline{r} - \overline{r}_0 = \begin{Vmatrix} x-7 \\ y+3 \\ z-1 \end{Vmatrix} \text{колінеарний } \overline{s}_1 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L : \frac{x-7}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{0}. \bullet$$

Навчальна задача 12.5. Задати пряму L, яка проходить через точку $M_0(1;-4;3)$ перпендикулярно до площини $P: 3x - y + 5 = 0$ (рис. 12.28).

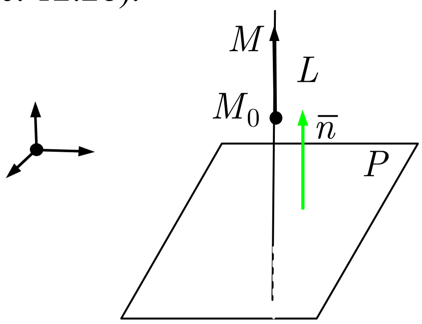

Рис. 12.28

❍Оскільки пряма L перпендикулярна до площини P, то за напрямний вектор шуканої прямої L можна взяти нормальний вектор площини P:

$$\overline{s}(L) = \overline{n}(P) = \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Нехай точка $M(\overline{r}) \in L$. Тоді (див. *Навчальна задача 11.2*)

$$\overline{r} - \overline{r}_0 = \begin{Vmatrix} x-1 \\ y+4 \\ z-3 \end{Vmatrix} \text{колінеарний } \overline{n} = \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L : \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-3}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -4 - t, \\ z = 3. \end{cases} \bullet$$

Навчальна задача 12.6. Знайти точку перетину прямої $L: \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{s}$ і площини $P: (\overline{r} - \overline{r}_1, \overline{n}) = 0$. Розв'язати задачу:

1) в загальному вигляді (рис. 12.29);

$$2) \text{ для } L: \begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t \end{cases} \text{ та } P: 3x - y + 2z - 5 = 0.$$

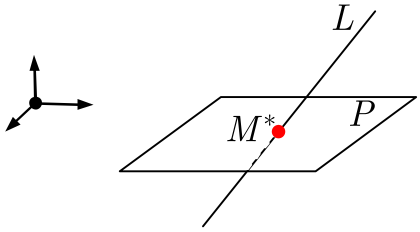

Рис. 12.29

❍ 1) Запишімо стисло загальний розв'язок задачі. Нехай $M^*(\overline{r}^*)$ — точка перетину площини P і прямої L.

Площина $P \perp \overline{n}$ і пряма $L \parallel \overline{s}$ перетинатимуться лише в одній точці, якщо

$$P \not\parallel L \Leftrightarrow \overline{n} \not\perp \overline{s} \Leftrightarrow (\overline{n}, \overline{s}) \neq 0.$$

$$\begin{cases} M^*(\overline{r}^*) \in L, \\ M^*(\overline{r}^*) \in P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{r}^* = \overline{r}_0 + t\overline{s}, \\ (\overline{r}^* - \overline{r}_1, \overline{n}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{r}_0 + t\overline{s} - \overline{r}_1, \overline{n}) = 0 \Rightarrow t(\overline{s}, \overline{n}) + (\overline{r}_0 - \overline{r}_1, \overline{n}) = 0;$$

$$t = \frac{(\overline{r}_1 - \overline{r}_0, \overline{n})}{(\overline{s}, \overline{n})} \Rightarrow \boxed{\overline{r}^* = \overline{r}_0 + \frac{(\overline{r}_1 - \overline{r}_0, \overline{n})}{(\overline{s}, \overline{n})}\overline{s}.}$$

2) З рівнянь площини P і прямої L випливає, що

$$\overline{n}(P) = \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad \overline{s}(L) = \begin{Vmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

Вектори $\overline{n}$ та $\overline{s}$ — не ортогональні, оскільки

$$3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 22 \neq 0.$$

Отже, площина P і пряма L перетинаються в одній точці, координати якої знайдімо із системи:

$$\begin{cases} P: 3x - y + 2z - 5 = 0. \\ L: \begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 3(7+5t) - (4+t) + 2(5+4t) - 5 = 0;$$

$$22t + 22 = 0; t = -1 \Rightarrow$$

$$P \cap L = M^* : \begin{cases} x = 7 + 5 \cdot (-1) = 2, \\ y = 4 + (-1) = 3, \\ z = 5 + 4 \cdot (-1) = 1; \end{cases}$$

$$M^*(2;3;1). \quad \bullet$$

Навчальна задача 12.7. Знайти проекцію точки $M_0(1;0;1)$ на площину $P: 4x + z + 12 = 0$ (рис. 12.30).

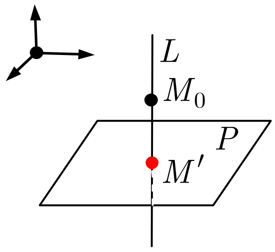

Рис. 12.30

❍1. Пряма L, яка проектує точку M_0 на площину P перпендикулярна до P, а отже має параметричні рівняння (див. *Навчальна задача 12.5*)

$$L: \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = 0, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

2. Знайдімо точку M' — проекцію точки M_0 — точку перетину прямої L і площини P (див. *Навчальна задача 12.6*):

$$M': \begin{cases} 4x + z + 12 = 0, \\ x = 1 + 4t, \\ y = 0, \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow M'(-3;0;0). \bullet$$

Навчальна задача 12.8. Знайти проекцію точки $M_0(2;-1;3)$ на пряму

$$L:\begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t + 2. \end{cases} \text{ (рис. 12.31).}$$

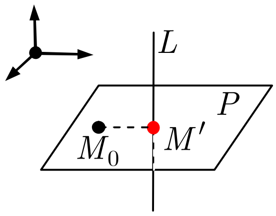

Рис. 12.31

❍1. Площина P, що проектує точку M_0 на пряму L, має рівняння (див. *Навчальна задача 12.2*):

$$(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{s}) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y + 2z - 7 = 0.$$

2. Знайдімо точку M' — проекцію точки M_0 — точку перетину прямої L і площини P (див. *Навчальна задача 12.8*):

$$\begin{cases} P: 3x + 5y + 2z - 7 = 0, \\ L: \begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t + 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow M'(3; -2; 4).\bullet$$

Навчальна задача 12.9. Записати рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(5; 2; 4)$ перпендикулярно до прямої

$$L_1:\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2t \end{cases} \text{ (рис. 12.32)}$$

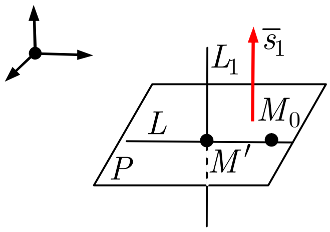

Рис. 12.32

❍Знайдімо проекцію точки M_0 на пряму L_1 (див. *Навчальна задача 12.8*).

1. Рівняння площини P, яка проектує точку M_0 на пряму L_1:

$$P: 3x + 4y + 2z - 31 = 0.$$

2. Проекція точки M_0 на пряму L — точка M':

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z - 31 = 0, \\ x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 2t. \end{cases} \Rightarrow M'(5;3;2).$$

Проведімо пряму L через точки M_0 та M' (див. *Навчальна задача 11.3*):

$$L: \frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}. \quad \bullet$$

Навчальна задача 12.10. Знайти точку, що симетрична точці $M_1(2;-5;7)$ щодо прямої $L: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-6}{2}$.

❍ Точку $M_2 : \left|M_1'M_2\right| = \left|M_1M_1'\right|$ звуть симетричною точці M_1 щодо прямої L (рис. 12.33).

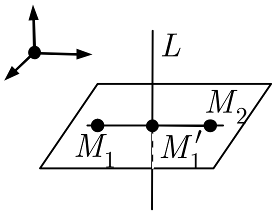

Рис. 12.33

1. Знайдімо проекцію точки M_1 на пряму L — точку M_1' (див. *Навчальна задача 12.8*):

$$M_1'(3;-2;2).$$

2. Точка M_2 поділяє відрізок M_1M_1' у відношенні $\lambda = -2$ (див. *п. 7.1.1*), отже,

$$\overline{r_2} = 2\overline{r_1}' - \overline{r_1} \Rightarrow \overline{r_2} = 2\begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix} \Rightarrow M_2(4;1;-3). \quad \bullet$$

Навчальна задача 12.11. Знайти точку, що симетрична точці $M_1(1;3;-4)$ щодо площини $P: 3x + y - 2z = 0$.

❍ Точку $M_2 : \left|M_1'M_2\right| = \left|M_1M_1'\right|$ звуть симетричною точці M_1 щодо площини P (рис. 12.34).

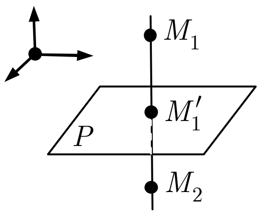

Рис. 12.34

1. Знайдімо проекцію точки M_1 на площину P — точку M_1' (див. *Навчальна задача 12.7*):

$$M_1'(-2;2;-2).$$

2. Точка M_2 поділяє відрізок M_1M_1' у відношенні $\lambda = -2$ (див. *п. 7.1.1*), отже,

$$\overline{r_2} = 2\overline{r_1}' - \overline{r_1} \Rightarrow \overline{r_2} = 2\begin{Vmatrix}-2\\2\\-2\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}1\\3\\-4\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}-5\\1\\0\end{Vmatrix} \Rightarrow M_2(-5;1;0). \bullet$$

Навчальна задача 12.12. Записати рівняння спільного перпендикуляра L до мимобіжних прямих $L_1(M_1;\overline{s_1})$, $L_2(M_2;\overline{s_2})$. Розв'язати задачу:
1) в загальному вигляді (рис. 12.35);
2) для $L_1 : \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-10}{-1}$,

$$L_2 : \frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

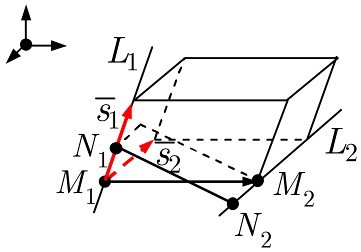

Рис. 12.35

❍1) А. За нормальний вектор площини P, яка проходить через пряму $L_1(M_1;\overline{s_1})$ паралельно прямій $L_2(M_2;\overline{s_2})$ (див. *Навчальна задача 12.3* та *Зауваження 11.3 до Навчальної задачі 11.6*) візьмімо вектор

$$\overline{n}(P) = [\overline{s_1}, \overline{s_2}].$$

Б. Площину P_1, яка містить пряму L_1 і перпендикулярна до площини $P \perp [\overline{s_1}, \overline{s_2}]$ (див. *Навчальна задача 11.6*) задамо рівнянням

$$(\overline{r} - \overline{r_1}, \overline{s_1}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0.$$

В. Площину P_2, яка містить пряму L_2 і перпендикулярна до площини $P \perp [\overline{s_1}, \overline{s_2}]$ (див. *Навчальна задача 12.3*) задамо рівнянням

$$(\overline{r} - \overline{r_2}, \overline{s_2}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0.$$

Г. Шукану пряму L — спільний перпендикуляр до прямих L_1 та L_2 — задамо перетином двох площин P_1 та P_2 :

$$\begin{cases}(\overline{r} - \overline{r_1}, \overline{s_1}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0,\\(\overline{r} - \overline{r_2}, \overline{s_2}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0.\end{cases}$$

Вектор $[\overline{s_1}, \overline{s_2}]$ — напрямний вектор прямої L, а оскільки

$$\overline{s_1} \perp [\overline{s_1}, \overline{s_2}], \overline{s_2} \perp [\overline{s_1}, \overline{s_2}],$$

то прямі L та L_1 — перетинаються в точці N_1, а прямі L та L_2 в точці $N_2 \neq N_1$. Пряма $L = N_1N_2$ — спільний перпендикуляр до прямих L_1, L_2.

2) З рівнянь прямих L_1 та L_2 випливає, що точка $M_1(6;1;10) \in L_1$ та точка $M_2(-4;3;4) \in L_2$ і напрямні вектори прямих

$$\overline{s_1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}, \overline{s_2} = \begin{Vmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Переконаймося, що прямі L_1 та L_2 — мимобіжні (див. *Теорема 12.1*):

$$\overline{M_1M_2} = \overline{r_2} - \overline{r_1} = \begin{Vmatrix} -10 \\ 2 \\ -6 \end{Vmatrix};$$

$$[\overline{s_1}, \overline{s_2}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot 8 - \overline{j} \cdot (-4) + \overline{k} \cdot 16 = \begin{Vmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{Vmatrix}.$$

$$(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{s_1}, \overline{s_2}) = (\overline{r_2} - \overline{r_1}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) =$$

$$= (-10) \cdot 8 + 2 \cdot 4 + (-6) \cdot 16 = -168 \neq 0.$$

Отже, прямі L_1 та L_2 — мимобіжні.

А. За нормальний вектор площини P, яка проходить через пряму $L_1(M_1; \overline{s_1})$ паралельно прямій $L_2(M_2; \overline{s_2})$, візьмімо вектор

$$\overline{n}(P) = [\overline{s_1}, \overline{s_2}] = \begin{Vmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{Vmatrix}.$$

Б. Площину P_1, яка містить пряму L_1 і перпендикулярна до площини $P \perp [\overline{s_1}, \overline{s_2}]$ задамо рівнянням

$$(\overline{r} - \overline{r_1}, \overline{s_1}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & y-1 & z-10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6) \cdot 36 - (y-1) \cdot 24 + (z-10) \cdot (-12) = 0;$$

$$P_1 : 3x - 2y - z - 6 = 0.$$

В. Площину P_2, яка містить пряму L_2 і перпендикулярна до площини $P \perp [\overline{s_1}, \overline{s_2}]$, задамо рівнянням

$$(\overline{r}-\overline{r}_2,\overline{s}_2,[\overline{s}_1,\overline{s}_2])=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x+4 & y-3 & z-4\\ -7 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+4)\cdot 5-(y-3)\cdot(-34)+(z-4)\cdot(-11)=0;$$

$$P_2: 5x+34y-11z-38=0.$$

Г. Шукану пряму L — спільний перпендикуляр до прямих L_1 та L_2 — задамо перетином двох площин P_1 та P_2 :

$$L:\begin{cases}3x-2y-z-6=0,\\ 5x+34y-11z-38=0.\end{cases}\bullet$$

Навчальна задача 12.13. Записати рівняння площини P, яка рівновіддалена від двох площин $P_1\perp\overline{n}_1^0$ та $P_2\perp\overline{n}_2^0$. Розв'язати задачу:
1) в загальному вигляді;
2) для $P_1: x-z-5=0, P_2: 3x+5y+4z=0$.

❍ 1) Знайдімо множину точок M :

$$d(M,P_1)=d(M,P_2)\Leftrightarrow$$

$$\left|(\overline{r},\overline{n}_1^0)-p_1\right|=\left|(\overline{r},\overline{n}_2^0)-p_2\right|\Leftrightarrow$$

$$(\overline{r},\overline{n}_1^0)-p_1=\pm((\overline{r},\overline{n}_2^0)-p_2)\Leftrightarrow$$

$$P:\begin{cases}(\overline{r},\overline{n}_1^0)-\dfrac{p_1+p_2}{2}=0, & \overline{n}_1^0=\overline{n}_2^0,\\ (\overline{r},\overline{n}_1^0)-\dfrac{p_1-p_2}{2}=0, & \overline{n}_1^0=-\overline{n}_2^0,\\ \left[\begin{array}{l}(\overline{r},\overline{n}_1^0-\overline{n}_2^0)-p_1+p_2=0,\\ (\overline{r},\overline{n}_1^0+\overline{n}_2^0)-p_1-p_2=0,\end{array}\right. & \overline{n}_1^0\not\parallel\overline{n}_2^0.\end{cases}$$

2) Знайдімо множину точок, рівновіддалених від площин P_1 та P_2 (див. *п. 12.3.3*).

$$d(M,P_1)=\frac{|x-z-5|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|x-z-5|}{\sqrt{2}};$$

$$d(M,P_2)=\frac{|3x+5y+4z|}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}}=\frac{|3x+5y+4z|}{5\sqrt{2}}.$$

$$d(M,P_1)=d(M,P_2)\Leftrightarrow\frac{|x-z-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|3x+5y+4z|}{5\sqrt{2}};$$

$$5|x-z-5|=|3x+5y+4z|;$$

$$5(x-z-5)=\pm(3x+5y+4z);$$

$$\left[\begin{array}{l}5x-5z-25=3x+5y+4z,\\ 5x-5z-25=-3x-5y-4z\end{array}\right..$$

Отже, оскільки площини P_1 та P_2 — не паралельні, дістанемо рівняння двох «бісекторіальних» площин:

$$P':2x-5y-9z-25=0,$$

$$P'':8x+5y-z-25=0.\ \bullet$$

Навчальна задача 12.14. Через пряму $L:\begin{cases}3x-y+2z+9=0,\\ x+z-3=0\end{cases}$ провести площину паралельну осі Ox.

❍ Запишімо рівняння жмутка площин, що проходять через пряму L:

$$\alpha(3x-y+2z+9)+\beta(x+z-3)=0;$$

$$(3\alpha+\beta)x-\alpha y+(2\alpha+\beta)z+(9\alpha-3\beta)=0.$$

Площина буде паралельна осі Ox, коли $3\alpha+\beta=0$. Звідки $\beta=-3\alpha$.

Отже, рівняння шуканої площини:

$\alpha(3x-y+2z+9)-3\alpha(x+z-3)=0\Rightarrow y+z-18=0.$ ●

Навчальна задача 12.15. Визначити двогранні кути, які утворюють площини: $P_1:6x+3y-2z=0$, $P_2:x+2y+6z-12=0$.

❍ Нормальні вектори заданих площин P_1 та P_2 мають координати:

$$\overline{n}_1=\begin{Vmatrix}6\\3\\-2\end{Vmatrix}\text{ та }\overline{n}_2=\begin{Vmatrix}1\\2\\6\end{Vmatrix}.$$

Знайдімо довжини цих векторів:

$$|\overline{n}_1|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7;$$

$$|\overline{n}_2|=\sqrt{1^2+2^2+6^2}=\sqrt{1+4+36}=\sqrt{41}.$$

За формулою

$$\cos(\widehat{P_1,P_2})=\cos(\widehat{\overline{n}_1,\overline{n}_2})=\frac{(\overline{n}_1,\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}$$

знайдімо шуканий кут:

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 6}{7\cdot\sqrt{41}} = \frac{0}{7\sqrt{41}} = 0;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.\bullet$$

Навчальна задача 12.16. Записати рівняння площини P, яка проходить через точку $M_0(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $P_1 : x+y+5z-9=0$ та $P_2 : 2x+y+2z+1=0$.

❍ Шукана площина перпендикулярна до площин P_1 та P_2. Отже, її нормальний вектор $\overline{n}$ перпендикулярний до їхніх нормальних векторів $\overline{n}_1 = (1;1;5)^T$ та $\overline{n}_2 = (2;1;2)^T$.

Тоді $\overline{n}(P) = [\overline{n}_1, \overline{n}_2]$. Знайдімо його координати:

$$\overline{n} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \overline{i}(2-5) - \overline{j}(2-10) + \overline{k}(1-2) =$$

$$= -3\overline{i} + 8\overline{j} - \overline{k} = \begin{Vmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Запишімо рівняння площини з нормальним вектором $\overline{n} = (-3;8;-1)^T$, яка проходить через точку $M_0(2;-1;1)$.

$$(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3(x-2) + 8(y+1) - 1(z-1) = 0;$$

$$P : -3x + 8y - z + 15 = 0.\bullet$$

Навчальна задача 12.17. Знайти віддаль від точки $M_0(1;2;-3)$ до площини $5x-3y+z+14=0$. З'ясувати, в одному чи різних підпросторах щодо заданої площини розташована точка M_0 та початок системи координат.

❍ Щоб знайти шукану віддаль, скористаємось формулою:

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|5\cdot 1 - 3\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 14|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{|5-6-3+14|}{\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{35}}.$$

З'ясуймо знак відхилення точки M_0 від площини:

$$\delta(M_0, P) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{-\operatorname{sgn} d\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{5-6-3+14}{-\sqrt{35}} = -\frac{10}{\sqrt{35}} < 0.$$

Від'ємний знак відхилення вказує на те, що точка M_0 та початок системи координат належать одному підпростору щодо заданої площини (див. *Зауваження 12.1*).●

Навчальна задача 12.18. Знайти кут між прямими $L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ та $L_2 : \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$

❍Знайдімо напрямні вектори прямих:

$$\overline{s_1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}; \quad \overline{s_2} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{Vmatrix}$$

(у подальшому зручніше взяти йому колінеарний вектор $\overline{s_2'} = (1;2;1)^T$).

За формулою

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{s_1}, \overline{s_2'}}) = \frac{(\overline{s_1}, \overline{s_2'})}{|\overline{s_1}||\overline{s_2'}|}$$

знайдімо

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{1 - 4 + 3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = 0.$$

Отже, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто прямі перпендикулярні.●

Навчальна задача 12.19. Задано чотири точки $A_1(1;0;-1)$, $A_2(0;2;3)$, $A_3(1;1;1)$, $A_4(3;-3;0)$. Записати рівняння:
1) площини $A_1A_2A_3$;
2) прямої A_1A_2;
3) прямої A_4M, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;
4) прямої A_3N, паралельної прямій A_1A_2;
5) площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2.
Обчислити:
6) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;
7) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1A_2A_3$ (рис. 12.37).

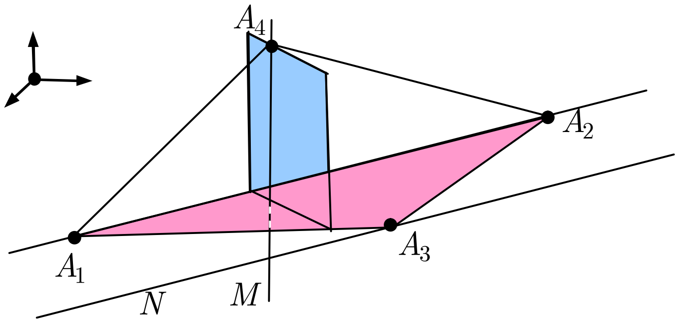

Рис. 12.37

❍Знайдімо координати векторів:

$$\overline{A_1A_2}=\overline{r}_2-\overline{r}_1=\begin{Vmatrix}-1\\2\\4\end{Vmatrix},\ \overline{A_1A_3}=\overline{r}_3-\overline{r}_1=\begin{Vmatrix}0\\1\\2\end{Vmatrix},\ \overline{A_1A_4}=\overline{r}_4-\overline{r}_1=\begin{Vmatrix}2\\-3\\1\end{Vmatrix}.$$

1) Площину $A_1A_2A_3$ задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.9*)

$$\boxed{(\overline{r}-\overline{r}_1,\overline{r}_2-\overline{r}_1,\overline{r}_3-\overline{r}_1)=0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y & z+1\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot 0-y\cdot(-2)+(z+1)\cdot(-1)=0;$$

$$A_1A_2A_3:-2y+z=0.$$

2) Пряму A_1A_2 задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.2*)

$$\boxed{\overline{r}-\overline{r}_1\parallel\overline{r}_2-\overline{r}_1}\Leftrightarrow A_1A_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{4}.$$

3) Оскільки пряма A_4H перпендикулярна до площини $A_1A_2A_3$, то за напрямний вектор прямої A_4H можна взяти нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$:

$$\overline{s}(A_4H)=\overline{n}(A_1A_2A_3)=\begin{Vmatrix}0\\-2\\1\end{Vmatrix}.$$

Пряму A_4H, що проходить через точку A_4 паралельно векторові $\overline{s}(A_4H)$, задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.2*)

$$\boxed{\overline{r}-\overline{r}_4\parallel\overline{s}(A_4H)}\Leftrightarrow A_4H:\frac{x-3}{0}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{1}.$$

4) Оскільки пряма A_3N паралельна прямій A_1A_2, то за напрямний вектор прямої A_3N можна взяти напрямний вектор прямої A_1A_2 :

$$\overline{s}(A_3N)=\overline{s}(A_1A_2)=\begin{Vmatrix}-1\\2\\4\end{Vmatrix}.$$

Пряму A_3N, що проходить через точку A_3 паралельно векторові $\overline{s}(A_3N)$, задає рівняння (див. *Навчальна задача 11.3*)

$$\boxed{\overline{r}-\overline{r}_3\parallel\overline{s}(A_3N)}\Leftrightarrow A_3N:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4}.$$

5) Рівняння площини P, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2, задає рівняння (див. *Навчальна задача 12.2*):

$$(\overline{r}-\overline{r}_4, \overline{s}(A_1A_2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-1(x-3)+2(y+3)+4(z-0) = 0;$$

$$P: -x+2y+4z+9 = 0.$$

6) Маємо напрямний вектор прямої A_1A_4 і нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$

$$\overline{s}(A_1A_4) = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \overline{n}(A_1A_2A_3) = \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$\boxed{\sin(\widehat{A_1A_4, A_1A_2A_3}) = \frac{|(\overline{n}, \overline{s})|}{|\overline{n}||\overline{s}|} =}$$

$$= \frac{|0\cdot 2+(-2)\cdot(-3)+1\cdot 1|}{\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{0^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{A_1A_4, A_1A_2A_3}\right) = \arcsin\frac{7}{\sqrt{70}}.$$

7) Нормальні вектори площин Oxy та $A_1A_2A_3$

$$\overline{n}(Oxy) = \overline{k} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \overline{n}(A_1A_2A_3) = \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$\boxed{\cos(\widehat{Oxy, A_1A_2A_3}) = \frac{|(\overline{n}_1, \overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} =}$$

$$= \frac{|0\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot 1|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{1}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{Oxy, A_1A_2A_3}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}. \bullet$$

Навчальна задача 12.20.

Задано вершини трикутника $ABC: A(2;-2), B(3;-5), C(5;7)$. Знайдіть:
1) рівняння прямої AB;
2) рівняння висоти CH;
3) рівняння медіани AM;
4) точку N перетину медіани AM і висоти CH;
5) рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно боку AB;
6) віддаль від точки C до прямої AB (рис. 12.38).

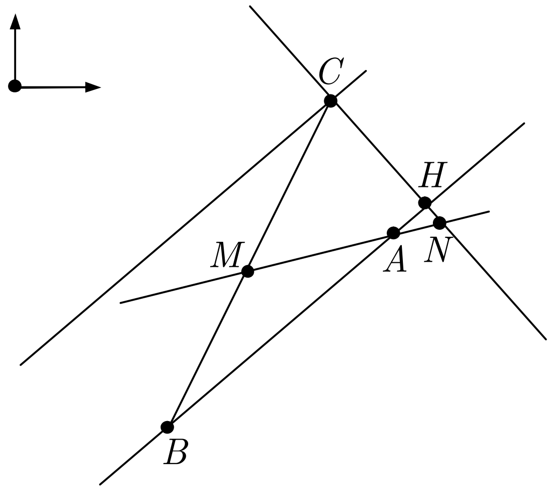

Рис. 12.38

❍Знайдімо координати вектора

$$\overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \end{Vmatrix}.$$

1) Пряму AB через точки A та B задає рівняння

$$\boxed{\overline{r} - \overline{r}_A \parallel \overline{r}_B - \overline{r}_A} \Leftrightarrow AB : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} \Leftrightarrow AB : 3x + y - 4 = 0.$$

2) Висота CH перпендикулярна до прямої AB, отже, за нормальний вектор прямої CH можна взяти напрямний вектор прямої AB:

$$\overline{n}(CH) = \overline{s}(AB) = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \end{Vmatrix}.$$

Пряму CH, що проходить через точку C перпендикулярно до вектора $\overline{n}(CH)$, задає рівняння

$$\boxed{(\overline{r} - \overline{r}_C, \overline{n}(CH)) = 0} \Leftrightarrow (x-5)\cdot 1 + (y-7)\cdot(-3) = 0;$$

$$CH : x - 3y + 16 = 0.$$

3) Точка M — середина боку BC — має координати (див. *п. 7.1.1*):

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4,\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-5+7}{2} = 1 \Rightarrow M(4;1).$$

Проведімо медіану AM через точки A та M:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y+2}{1+2} \Rightarrow AM : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{3}.$$

4) Координати точки N перетину медіани AM та висоти CH знайдімо із системи

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{3}, \\ x - 3y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{62}{7}; \frac{58}{7}\right).$$

5) За напрямний вектор прямої CF, яка паралельна прямій AB, можна взяти

$$\overline{s}(CF) = \overline{s}(AB) = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \end{Vmatrix}.$$

Пряму CF, що проходить через точку C паралельно прямій AB, задає рівняння

$$CF : \frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{-3}.$$

6) Віддаль від точки C до прямої $AB : 3x + y - 4 = 0$ знайдімо за формулою:

$$\boxed{d(C,L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{|3\cdot 5 + 7 - 4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{18}{\sqrt{10}}.\bullet$$

Навчальні задачі 12.21—12.23 див. у *п. 12.4.7.*

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 12.1. Визначте двогранні кути, які утворює пара площин $3y - z = 0$ та $2y + z = 0$.

❍ $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. ●

Задача 12.2. Запишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат і:
1) паралельна площині $2x + 3z + 5 = 0$;
2) перпендикулярна до площин $x + 2y + z = 0$ та $2x + y + 3z - 1 = 0$.

❍ 1) $2x + 3z = 0$; 2) $5x - y - 3z = 0$. ●

Задача 12.3. Знайдіть відхилення δ і віддаль d точок $M_0(1;2;-1)$ та $M_1(3;-6;7)$ від площини $4x - 3z - 1 = 0$. З'ясуйте, чи перетинає відрізок M_0M_1 площину.

❍ $\delta(M_0, P) = \frac{6}{5}, d(M_0, P) = \frac{6}{5}; \delta(M_1, P) = -2, d(M_1, P) = 2$. Так. ●

Задача 12.4. Знайдіть гострий кут між прямими $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ та $L_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

❍ $\varphi = (\widehat{L_1, L_2}) = \frac{\pi}{3}$. ●

Задача 12.5. Знайдіть віддаль між прямими:
1) $L_1 : \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-2}$ та $L_2 : \frac{x-5}{-6} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{4}$;
2) $L_1 : x = 3 + 2t, y = 10 - 3t, z = 3 + 4t$ та $L_2 : x = 1 + 3t,\ y = 1 - 2t, z = 1 + 3t$.

❍ 1) $d(L_1, L_2) = \frac{\sqrt{26}}{7}$; 2) $d(L_1, L_2) = \sqrt{62}$. ●

Задача 12.6. Знайдіть точку Q, яка симетрична точці $A(1;2;3)$ щодо прямої $\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-11}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$.

❍ $Q(9;2;11)$. ●

Задача 12.7. Знайдіть ортогональну проекцію точки $A(2;1;1)$ на площину $x+y+3z+5=0$.

❍ $N(1;0;-2)$. ●

Задача 12.8. Через пряму $L_1:\begin{cases}2x-y+3z-5=0,\\ x+2y-z+2=0\end{cases}$ проведіть площину, яка паралельна прямій $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+4}{-2}$.

❍ $5x+5z-8=0$. ●