

Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення раціональної і дробово-раціональної функції. Запишіть загальний вигляд многочлена n -го степеня.
2. Як класифікують елементарні функції?
5. Яку функцію звать показниковою? Нарисуйте її графік для різних основ. Які характерні властивості має ця функція?
6. Яка функція є оберненою до показникової? Нарисуйте її графік.
7. Які функції звать гіперболічними? Запишіть кілька співвідношень для гіперболічних функцій.
8. Вкажіть, як треба перетворити графік функції $y = f(x)$, щоб дістати графік функції $y = b + kf(ax)$ у деякій ПДСК (a, b, k — дійсні параметри).
9. Вкажіть, як треба перетворити графік функції $y = f(x)$, щоб дістати графіки функцій $y = f(|x|)$ та $y = |f(x)|$? Як при цьому міняється область означення і множина значень функції?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 5.1.

Побудуйте графіки функцій, користуючись геометричними перетвореннями графіків основних елементарних функцій:

$$1) y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1;$$

$$2) y = \operatorname{arctg} |x - 1|;$$

$$3) y = |\arcsin(x + 1)|.$$

○1) Побудуємо графік заданої функції, користуючись графіком функції $y = \sin x$. Запишімо ланцюжок перетворень і зобразимо графіки всіх функцій (рис. 5.27, 5.28, 5.29):

$$y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \xleftarrow{5} y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \xleftarrow{4} \\ \xleftarrow{3} y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \equiv \sin 2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \xleftarrow{2} y = \sin 2x \xleftarrow{1} y = \sin x.$$

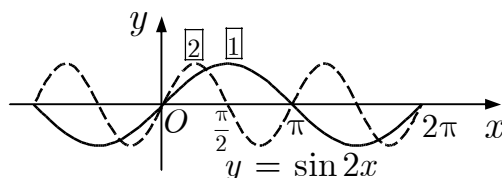


Рис. 5.27

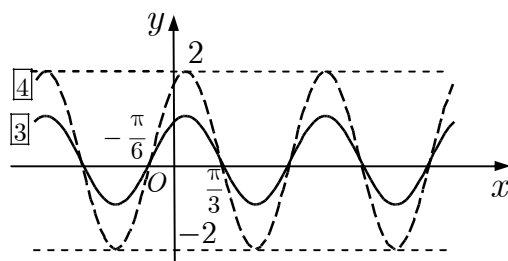


Рис. 5.28

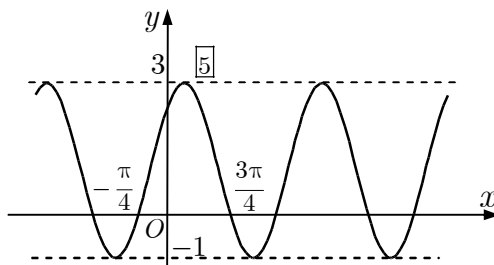


Рис. 5.29

2) Побудуємо графік заданої функції, користуючись графіком функції $y = \arctg x$. Запишімо ланцюжок перетворень і зобразимо графіки всіх функцій (рис. 5.30, 5.31):

$$y = \arctg|x - 1| \leftarrow y = \arctg|x| \leftarrow y = \arctg x, x \geq 0.$$

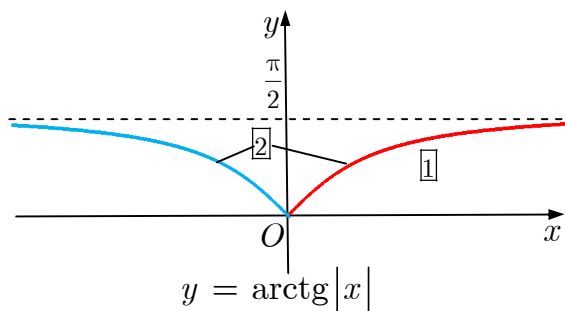


Рис. 5.30

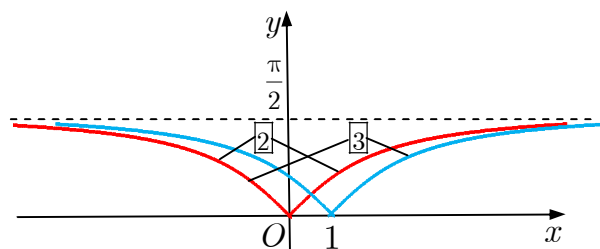


Рис. 5.31

3) Побудуємо графік заданої функції, користуючись графіком функції $y = \arcsin x$. Запишімо ланцюжок перетворень і зобразимо графіки всіх функцій (рис. 5.32, 5.33):

$$y = |\arcsin(x + 1)| \leftarrow y = \arcsin(x + 1) \leftarrow y = \arcsin x.$$

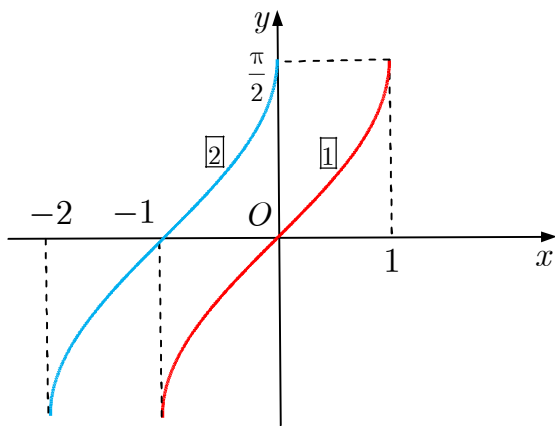


Рис. 5.32

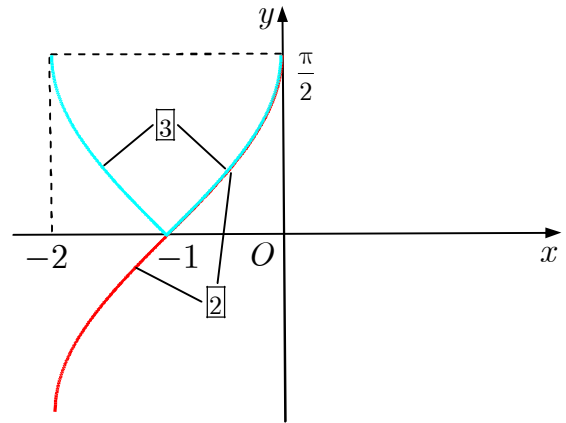


Рис. 5.33

**Навчальна
задача 5.2.**

Знайти область значень функції $f(x)$. Визначити амплітуду, частоту, період і фазу гармонічного коливання, яке задає функція $f(x)$.

1) $f(x) = 5 \sin 3x - 12 \cos 3x$;

2) $f(x) = -8 \sin \frac{x}{3} - 15 \cos \frac{x}{3}$.

Скористаємось співвідношенням

$$A \sin \omega x + B \cos \omega x = M \sin(\omega x + \alpha),$$

де $M = \sqrt{A^2 + B^2}$; початкову фазу α визначають із системи

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{cases}$$

1) Отже, $A = 5, B = -12$. Тоді,

$$M = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{13}, \\ \sin \alpha = -\frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\arccos \frac{5}{13}.$$

Тобто,

$$f(x) = 5 \sin 3x - 12 \cos 3x = 13 \sin \left(3x - \arccos \frac{12}{13} \right).$$

Оскільки множиною значень функції $f(x) = \sin x$, то множиною значень функції $f(x) = 13 \sin \left(3x - \arccos \frac{12}{13} \right) \in [-13; 13]$.

Амплітуда гармонічного коливання $M = 13$, частота $\omega = 3$, період $T = \frac{2\pi}{3}$, початкова фаза $\alpha = -\arccos \frac{12}{13}$.

2) Отже, $A = -8, B = -15$. Тоді,

$$M = \sqrt{(-8)^2 + (-15)^2} = \sqrt{289} = 17;$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{8}{17}, \\ \sin \alpha = -\frac{15}{17} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pi + \arccos \frac{8}{17}.$$

Тобто,

$$f(x) = 5 \sin 3x - 12 \cos 3x = 13 \sin \left(3x - \arccos \frac{12}{13} \right).$$

$$f(x) = -8 \sin \frac{x}{3} - 15 \cos \frac{x}{3} = 17 \sin \left(\frac{x}{3} + \pi + \arccos \frac{8}{17} \right).$$

Оскільки множиною значень функції $f(x) = \sin x$, то множиною значень функції $f(x) = 17 \sin \left(\frac{x}{3} + \pi + \arccos \frac{8}{17} \right) \in [-17; 17]$.

Амплітуда гармонічного коливання $M = 17$, частота $\omega = \frac{1}{3}$, період

$T = 6\pi$, початкова фаза $\alpha = \pi + \arccos \frac{8}{17}$. ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1.

Побудуйте графіки функцій, користуючись геометричними перетвореннями графіків основних елементарних функцій.

1) $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, якщо:

а) $a = 1, x_0 = 0, y_0 = -1$;

б) $a = 2, x_0 = 1, y_0 = 0$;

2) $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$, якщо:

а) $k = 1, x_0 = 1, y_0 = -1$;

б) $k = -2, x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}$;

3) $y = a \sin(kx + \alpha)$, якщо:

а) $a = 1, k = 2, \alpha = \frac{\pi}{3}$;

б) $a = -2, k = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{\pi}{3}$;

4) $y = a \operatorname{tg}(kx + \alpha)$, якщо:

а) $a = 3, k = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{\pi}{4}$;

б) $a = -\frac{1}{2}, k = 2, \alpha = \frac{3\pi}{2}$;

5) $y = p \arcsin(x + q)$, якщо:

а) $p = 4, q = -1$; б) $p = -\frac{2}{3}, q = \frac{1}{2}$;

6) $y = p \operatorname{arctg}(x + q)$, якщо:

а) $p = -3, q = \frac{\pi}{2}$; б) $p = \frac{2}{5}, q = -6$.

7) $y = a^{kx+b}$, якщо:

а) $a = 2, k = -1, b = 1$;

б) $a = \frac{1}{2}, k = 2, b = -2$.

8) $y = \log_a(kx + b)$, якщо:

а) $a = 10, k = 10, b = -1$;

б) $a = \frac{1}{10}, k = \frac{1}{2}, b = 2$.