Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Що звуть границею функції в точці за Гейне і за Коші? Як пов’язані ці означення?
2. Чи може границя функції бути нескінченною або не існувати? Подайте приклади.
3. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування скінченної границі функції.
4. Сформулюйте властивості функцій, що мають скінченну границю.
5. Подайте означення однобічних границь функції. Який зв’язок має скінченна границя функції в точці з однобічними границями в цій точці?
6. Подайте 7 типів невизначеностей.
7. Сформулюйте правило розкриття невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$ у разі дробово-раціональної функції.
8. Що звуть асимптотою кривої? Які типи асимптот існують?
9. Яку функцію звуть неперервною функцією в точці?
10. Що звуть приростом аргументу функції, а що приростом функції в точці x_0?
11. Сформулюйте означення неперервності функції в точці «мовою приростів».

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 6.1.

Виходячи з означення границі функції в точці за Коші довести, що:
1) $\lim\limits_{x\to 2}(4x+1)=9;$
2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x+2}=0;$
3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x+2}=\infty.$

❍ 1) Візьмімо $\varepsilon>0$ і знайдімо таке $\delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які справджують нерівність $|x-2|<\delta$, виконано нерівність

$$\big|(4x+1)-9\big|<\varepsilon;\ |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Якщо $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$, то

$$|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow\big|(4x+1)-9\big|<\varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 2}(4x+1)=9.$

2) За означенням

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon_1>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x:x>\delta_1\Rightarrow\left|\frac{1}{x+2}-0\right|<\varepsilon_1.$$

Візьмімо довільне $\varepsilon_1 > 0$, тоді

$$\frac{1}{x+2} < \varepsilon_1;\ x+2 > \frac{1}{\varepsilon_1};\ x > \frac{1}{\varepsilon_1} - 2.$$

Якщо $\delta_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} - 2$, коли $\frac{1}{\varepsilon_1} - 2 > 0$, або $\delta_1 = 0$, коли $\frac{1}{\varepsilon_1} - 2 < 0$, то

$$x > \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{x+2} < \varepsilon_1,$$

а, отже, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ (рис. 6.11).

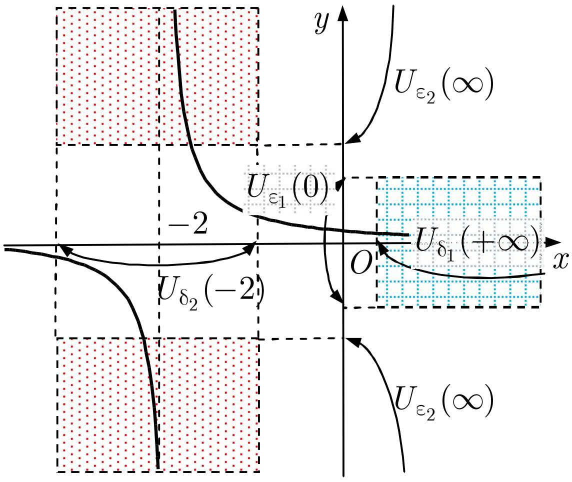

Рис. 6.11

3) За означенням

$$\lim_{x\to-2} \frac{1}{x+2} = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon_2 > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x : 0 < |x+2| < \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}\right| > \varepsilon_2.$$

Візьмімо довільне $\varepsilon_2 > 0$, тоді

$$\left|\frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{|x+2|} > \varepsilon_2 \Rightarrow |x+2| < \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Якщо $\delta_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}$, то для всіх x:

$$0 < |x+2| < \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{x+2}\right| > \varepsilon_2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{x+2} = \infty$ (див. рис. 6.11).●

Навчальна задача 6.2.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

❍Способи відшукання границі функції в точці залежать як від самої функції, так і від точки, до якої прямує аргумент функції.

1) Функція є відношенням двох многочленів. Оскільки знаменник не прямує до нуля, коли $x \to 0$, то до обчислення цієї границі застосовна *теорема 6.1*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{0-1}{2\cdot 0^2-0-1}=1.$$

2) Знаменник дробу прямує до нуля, коли $x \to -\frac{1}{2}$, а чисельник до нуля не прямує — це «визначена» ситуація:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{-\frac{3}{4}}{0}\right]=\infty.$$

3) Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$ — чисельник і знаменник раціонального дробу прямують до нуля — щоб знайти границю, треба перетворити вираз під знаком границі:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$$

4) Оскільки найвищі степені чисельника і знаменника рівні, то границя відношення многочленів, коли аргумент прямує до нескінченності, дорівнює відношенню старших коефіцієнтів чисельника і знаменника (*п. 6.3.2*):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}.$$

Справді,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$ ●

Навчальна задача 6.3.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{x^3+2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2(x+1)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ $(n, m \in \mathbb{N})$.

❍Безпосередньо теорему про границю частки застосувати не можна, оскільки границя чисельника і знаменника дорівнює нулеві — маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Розкриймо її, розклавши чисельник і знаменник на множники.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^3+2x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x+1)}{x^2(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{x+1}{x+2}=0.$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)(x-\frac{3}{2})}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{2(x-\frac{3}{2})}=\dfrac{1}{7}.$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}=\frac{15}{11}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)^2(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)(x+1)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(\sqrt{x}-1)^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\infty.$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x+5}+3)=48.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}.$$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x^n-1}{x-1}}{\dfrac{x^m-1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\ldots+x^{m-1}}=\frac{n}{m}.$$ ●

Навчальна Знайти:

задача 6.4.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6}{5-4x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}$.

❍ 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$ (степінь многочлена знаменника вищий за степінь многочлена чисельника).

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6}{5-4x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=-\dfrac{3}{4}$ (степінь многочлена чисельника дорівнює степеню многочлена знаменника — границя дорівнює відношенню старших коефіцієнтів многочленів).

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty$ (степінь многочлена чисельника вищий за степінь многочлена знаменника).

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt[4]{1-\frac{5}{x^7}+\frac{3}{x^8}}}=4$ (найвищі степені чисельника і знаменника дорівнюють 2 з урахуванням показника кореня). ●

Навчальна задача 6.5.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)$.

❍ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2+3x+1}\right)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-\left(9x^2+3x+1\right)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(3x+1)}{3x+\sqrt{9x^2+3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(3+\frac{1}{x}\right)}{3+\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-3}{3+3}=-\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x+1}\right)=[-\infty-\infty]=-\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)-3}{(x-2)(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$ ●

Навчальна задача 6.6.

Знайти а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ $(x\neq 1), x_0=1$;

2) $f(x)=\dfrac{2}{x-2}, x_0=2$;

3) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2, \\ -2x+2, & x>2, \end{cases}$ $x_0=2$.

❍ 1) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=-1;$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2}{x-2}=-\infty;$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{x-2}=+\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x+1)=3;$

$$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}(-2x+2)=-2. \ \bullet$$

Навчальна задача 6.7.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x$; 6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arcctg}x$.

❍ Значення границь випливають з означень відповідних функцій.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{x+1}=+\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^{x+1}=0.$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=+\infty.$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0.$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}.$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi.$ ●

Навчальна задача 6.8.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\lg(4x-1+\sqrt{2x+5})$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}4^{\frac{2x}{x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\pi\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right)$;

❍ У цій задачі скористаємось можливістю переходу до границі під знаком неперервної функції, а функції $y=\lg x, y=4^x, y=\sin x, y=\cos x$ — неперервні в будь-якій точці області означення (що буде показано в модулі 7).

1) $\lim\limits_{x\to 2}\lg(4x-1+\sqrt{2x+5})=\lg\left(\lim\limits_{x\to 2}(4x-1+\sqrt{2x+5})\right)=\lg 10=1.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}4^{\frac{2x}{x+1}}=4^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}}=4^2=16.$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\pi\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\pi\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}\right)=$

$$=\lim_{x\to 2}\sin\frac{2\pi}{\sqrt{2x}+2}=\sin\left(\lim_{x\to 2}\frac{2\pi}{\sqrt{2x}+2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1. \bullet$$

Навчальна задача 6.9.

Означити, не користуючись знаком границі, функцію $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$ і побудувати її графік.

❍ 1) При кожному значенні x, що справджує нерівність $|x|<1$,

$$x^{2n}\to 0, x^{4n}\to 0, n\to\infty.$$

Отже, $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

При кожному значенні x, що справджує нерівність $|x|>1$,

$$x^{2n}\to +\infty, x^{4n}\to +\infty, n\to\infty.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-4n}+x^{-2n}}{2x^{-4n}+1}=0.$$

При $|x|=1$ і будь-якому n $x^{2n}=x^{4n}=1$. Отже, $f(x)=\dfrac{2}{3}$. Функцію f можна задати як

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1,\\ \dfrac{2}{3}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Графік її зображено на рис. 6.12.

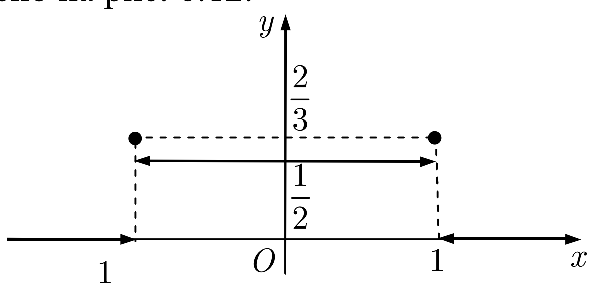

Рис. 6.12

Навчальна задача 6.10. Знайти рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$.

❍ Область означення функції $D(y) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

Дослідімо поведінку функції, коли $x \to -2$:

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x \to -2+0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty.$$

Отже, пряма $x = -2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.

Дослідімо поведінку функції, коли $x \to 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty.$$

Отже, пряма $x = 2$ є вертикальною (двобічною) асимптотою графіка функції.

Дослідімо поведінку функції, коли $x \to -\infty$, шукаючи похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k_{\_} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+2}{x(x^2-4)} = 1,$$

$$b_{\_} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3+2}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3+2-x^3+4x}{x^2-4} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x+2}{x^2-4} \right) = 0.$$

Так само, $k_{+} = 1, b_{+} = 0$. Отже, $y = x$ є похилою (двобічною) асимптотою графіка функції. ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. Виходячи з означення границі за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 8) = -5$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Задача 6.2. Знайти:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{8}{3}} \dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-2x-16}$.

❍ 1) $\dfrac{1}{5}$; 2) ∞; 3) $\dfrac{2}{7}$; 4) $\dfrac{1}{3}$. ●

Задача 6.3. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5}{2x^3+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{x^2+x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-10}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x-7}{3-4\sqrt{x^2+2}}$.

❍ 1) $\dfrac{3}{2}$; 2) 0; 3) ∞; 4) -2. ●

Задача 6.4. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+9x-7}{x^6+x^3-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{49-x^2}{1-\sqrt{8-x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$ $(n,m\in\mathbb{N}, a>0)$.

❍ 1) 17; 2) 1; 3) ∞; 4) -28; 5) $-\dfrac{1}{12}$; 6) $\dfrac{n}{m}a^{n-m}$. ●

Задача 6.5. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{12}{x^2-36}-\dfrac{1}{x-6}\right)$.

❍ 1) $-\infty$; 2) 0; 3) $-\dfrac{1}{12}$. ●

Задача 6.6. Знайти а) $f(x_0-0)$; б) $f(x_0+0)$:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}$ $(x\neq -1), x_0=-1$;

2) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}, x_0=2$;

3) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<2, \\ x^2, & x\geq 2, \end{cases}$ $x_0=2$.

❍ 1) $f(-1-0)=-1, f(-1+0)=1$; 2) $f(2-0)=0, f(2+0)=+\infty$; 3) $f(2-0)=3, f(2+0)=4$. ●

Задача 6.7. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x$.

❍ 1) $+\infty$; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) 0; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) 0. ●

Задача 6.8. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to1} \log_2(7x-1+\sqrt{3x+1})$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{x+1}{x^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to1} \cos\left(\pi\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$.

❍ 1) 3; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ●

Задача 6.9. Означте, не користуючись знаком границі, функцію $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ і побудуйте її графік.

❍ $f(x)=\begin{cases} 0, & |x|<1, \\ \frac{1}{2}, & |x|=1, \\ 1, & |x|>1. \end{cases}$ Графік функції зображено на рис. 6.13. ●

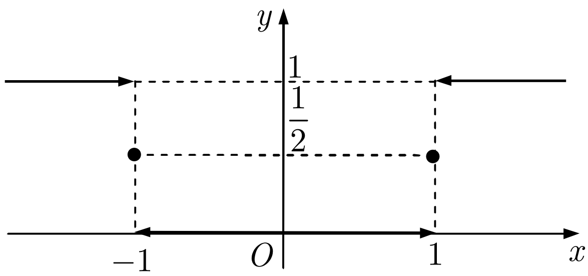

Рис. 6.13

Задача 6.10. Знайдіть рівняння асимптот графіка функції $y=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$.

❍Графік має вертикальну (двобічну) асимптоту $x = -1$ і похилу (двобічну) асимптоту $y = x + 2$. ●