Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Яку функцію звуть нескінченно малою і яку нескінченно великою? Сформулюйте їхні властивості.
2. Вкажіть зв'язок між нескінченно малими функціями і функцією, що має скінченну границю.
3. Запишіть і доведіть першу визначну границю. Які наслідки з неї Ви знаєте?
4. Запишіть і доведіть другу визначну границю. Які з наслідки з неї Ви знаєте?
5. Сформулюйте теорему про неперервність в точці елементарних функцій.
6. Яким чином порівнюють н. м. ф. і н. в. ф.? Сформулюйте означення н. м. ф. одного порядку мализни і н. м. ф. вищого порядку мализни.
7. Які н. м. ф. звуть еквівалентними? Запишіть таблицю основних еквівалентностей.
8. Сформулюйте правило розкриття невизначеності 1^∞.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 7.1.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{9\cos 2x+2x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}$.

❍ 1) $$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos x)=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}+x}{2}\sin\frac{x-\sqrt{x+1}}{2}=$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}+x}{2}\sin\frac{1}{2(x+\sqrt{x+1})}.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=\sin 0=0.$$

Функція $2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ обмежена:
$$\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le 2.$$

Добуток нескінченно малої функції на обмежену є функція нескінченно мала. Отже,
$$\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}+x}{2}\sin\frac{1}{2(x+\sqrt{x+1})}=0.$$

2) Оскільки функція $y=\sqrt{x}$ неперервна при всіх $x\ge 0$, то, переходячи до границі під знаком неперервної функції, дістаємо
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{9\cos 2x+2x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(9\cos 2x+2x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)}.$$

Оскільки $2x$ — н. м. ф., коли $x \to 0$, а функція $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ — обмежена в околі точки $x=0$, то $2x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ — н. м. ф., коли $x \to 0$, тобто

$$\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0.$$

Оскільки $9\cos 3x$ неперервна функція в точці $x=0$, то

$$\lim_{x\to 0} 9\cos 3x = 9\cos 0 = 9.$$

Отже,

$$\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(9\cos 2x + 2x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0}(9\cos 2x) + \lim_{x\to 0} 2x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = \sqrt{9} = 3. \bullet$$

Навчальна задача 7.2.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin 5x}-3^{\sin x}}{e^{x^2}-\cos x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[5]{1+x}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi - 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x}$.

❍ 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = |\sin 5x \sim 5x, x\to 0| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x} = 5.$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x} = \left|\begin{array}{l}\sin 2x \sim 2x, x\to 0\\ \operatorname{tg}x \sim x, x\to 0\\ 1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2} = 2x^2, x\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{2x^2} = 1.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = |\arcsin 2x \sim 2x, x\to 0| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x} = 2.$

4) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a}\frac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a} =$$

$$= \left| \sin\frac{x-a}{2} \sim \frac{x-a}{2}, x \to a \right| = \lim_{x\to a} \frac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot\dfrac{x-a}{2}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos a.$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} 1-\cos(1-\cos x) \sim \dfrac{(1-\cos x)^2}{2}, \\ 1-\cos x \to 0, x \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{2x^4}\left| \begin{matrix} 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \\ x \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{2x^4} = \frac{1}{8}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} \ln(1+5x) \sim 5x, \\ x \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x} = 5.$$

7) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} \ln(1+3^x) \sim 3^x, \\ \ln(1+2^x) \sim 2^x, \\ x \to -\infty \end{matrix} \right| = \lim_{x\to -\infty}\frac{3^x}{2^x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0.$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} e^{3x}-1 \sim 3x, \\ x \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 3.$$

9) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin 5x}-3^{\sin x}}{e^x-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}(3^{\sin 5x-\sin x}-1)}{(e^x-1)+(1-\cos x)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} 3^{\sin 5x-\sin x}-1 \sim (\sin 5x-\sin x)\ln 3 = \\ = 2\ln 3\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x, x \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{\sin x}\ln 3\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x}{(e^x-1)+(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{\sin x}\ln 3\cdot\dfrac{\sin 2x}{x}\cdot\cos 3x}{\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}} = \left| \begin{matrix} 3^{\sin x} \to 1, \cos 3x \to 1, \\ \dfrac{\sin 2x}{x} \to 2, \dfrac{e^x-1}{x} \to 1, \\ 1-\cos x \to 0, x \to 0 \end{matrix} \right| = 4\ln 3.$$

10) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[5]{1+x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} (1+x)^{1/5}-1 \sim \dfrac{1}{5}x, \\ x \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\dfrac{1}{5}x} = 5.$$

$$11)\ \lim_{x\to 0}\frac{\pi-4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=4\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}}{x}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}\right)}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{1+x}}{x\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{1+x}\right)}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{x\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)}=4\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}}{x\cdot\dfrac{x+2}{x+1}}=4\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=2.\ \bullet$$

Навчальна задача 7.3.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

❍ 1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}t=x-1, x=t+1\\ t\to 0, x\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7\pi(t+1)}{\sin 2\pi(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7\pi(t+1)}{\sin 2\pi(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi t+7\pi)}{\sin(2\pi t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 7\pi t}{\sin 2\pi t}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin 7\pi t\sim 7\pi t,\\ \sin 2\pi t\sim 2\pi t, t\to 0\end{matrix}\right|=-\lim_{t\to 0}\frac{7\pi t}{2\pi t}=-\frac{7}{2}.$$

2) $$\lim_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{x-10}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}t=x-10,\\ x=t+10,\\ t\to 0, x\to 10\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\lg(10+t)-\lg 10}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\lg\left(1+\dfrac{t}{10}\right)}{t}=\left|\begin{matrix}\lg\left(1+\dfrac{t}{10}\right)\sim\dfrac{t}{10\ln 10},\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t}{10\ln 10}}{t}=\frac{1}{10\ln 10}.$$

3) $$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=\left|e^{x-1}-1\sim x-1, x\to 1\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{x-1}=e.$$

4) $$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}t=x-1,\\ x=t+1,\\ t\to 0, x\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1-(t+1)^{1/3}}{1-(t+1)^{1/5}}=$$

$$= \left| \begin{array}{c} (1+t)^{1/3} - 1 \sim \dfrac{t}{3}, \\ (1+t)^{1/5} - 1 \sim \dfrac{t}{5}, \\ t \to 0 \end{array} \right| \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{3}t}{-\frac{1}{5}t} = \frac{5}{3}. \; \bullet$$

Навчальна задача 7.4.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{\pi}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(3^{1/x} - 1\right)$.

❍ 1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 3^x}{\ln 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln 3}{x \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left[\infty \cdot 0\right] =$$
$$= \left| \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}, x \to +\infty \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

3) $$\lim_{x\to 1} (1-x)\log_x 2 = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\log_2 x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\log_2(1-(1-x))} =$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{-\dfrac{(1-x)}{\ln 2}} = -\ln 2.$$

4) $$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x} = \left[\infty\cdot 0\right] = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{1}{x}, x = \dfrac{1}{t}, \\ t \to 0, x \to \infty \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi t}{t} =$$
$$= \left| \sin \pi t \sim \pi t, t \to 0 \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{t} = \pi.$$

5) $$\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x = \left|0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \pi x} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg} \pi x \sim \pi x, \\ x \to 0 \end{array} \right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\pi x} = \frac{1}{\pi}.$$

6) $$\lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x\operatorname{tg} x\right) = \left[\infty - \infty\right] = \lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - \frac{2x\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\pi - 2x \sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2}, \\ x = t + \frac{\pi}{2}, \\ t \to 0, x \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \lim_{t \to 0} \frac{\pi - 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\pi - (2t + \pi)\cos t}{-\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{\pi(1 - \cos t) - 2t \cos t}{-\sin t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\pi(1 - \cos t)}{-\sin t} + \lim_{t \to 0} \frac{2t \cos t}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\pi t^2}{2}}{-t} + \lim_{t \to 0} \frac{2t \cos t}{t} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{t \to 0} t + 2 \lim_{t \to 0} \cos t = 2.$$

7) $$\lim_{x \to \infty} x\left(3^{1/x} - 1\right) = [\infty \cdot 0] = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t}, \\ t \to 0, x \to \infty \end{array} \right| = \lim_{t \to 0} \frac{3^t - 1}{t} = \ln 3. \bullet$$

Навчальна задача 7.5.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1}\right)^{1/x^2}$.

❍ 1) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = 0.$$

2) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}} = \left[0^{1/2}\right] = 0.$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right] = +\infty.$$

4) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)x} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x}{x+1}} = e^{-1}.$$

5) $$\lim_{x \to 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to 0} (\ln(x+e) - 1)\operatorname{ctg} x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-\ln e}{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e}}{x}} = e^{1/e}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}-1\right)\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-\pi^x)}{x^2(x\pi^x+1)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi^x\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^x-1\right)}{x(x\pi^x+1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi^x x\ln\frac{e}{\pi}}{x(x\pi^x+1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi^x\ln\frac{e}{\pi}}{x\pi^x+1}} = e^{\ln\frac{e}{\pi}} = \frac{e}{\pi}. \bullet$$

Навчальна задача 7.6.

Які з функцій є нескінченно малими або нескінченно великими?

1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}, x\to 1;$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-4x^2+4x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}, x\to 2;$

3) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}, x\to +0;$

4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$; а) $x\to+\infty$, б) $x\to-\infty$?

❍ 1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=0.$$

Отже, $f(x)$ — н. м. ф., коли $x\to 1$.

2) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^3-4x^2+4x}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)=\left[\infty-\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty.$$

Отже, $f(x)$ — н. в. ф., коли $x\to 2$.

3) $$\lim_{x\to +0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=0.$$

Отже, $f(x)$ — н. м. ф., коли $x\to+0$.

4) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left[\infty+\infty\right]=\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Отже, $f(x)$ — н. в. ф., коли $x\to-\infty$; $f(x)$ — н. м. ф., коли $x\to+\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2^x}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+2^x}=0$.

Отже, $f(x)$ — н. м. ф., коли $x\to+\infty$. ●

Навчальна задача 7.7. Визначити порядок мализни і головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$:

1) $\alpha(x)=x^3+1000x^2$; 2) $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$.

❍ 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+1000x^2}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(x+1000)}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}x^{2-k}(x+1000)=$

$$=\begin{cases}0, & 2-k>0,\\ 1000, & 2=k,\\ \infty, & 2-k<0.\end{cases}$$

Отже, н. м. ф. $\alpha(x)$ має порядок 2 щодо н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to0$; головна частина $1000x^2$. Тобто

$$x^3+1000x^2\sim1000x^2, x\to0.$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1;}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+x^{1/3}\right)^{1/3}-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^{1/3}}{x^k}=$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}x^{1/3-k}=\begin{cases}0, & \frac{1}{3}-k>0,\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}=k,\\ \infty, & \frac{1}{3}-k<0.\end{cases}$$

Отже, н. м. ф. $\alpha(x)$ має порядок $\dfrac{1}{3}$ щодо н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to0$; головна частина $\dfrac{1}{3}x^{1/3}$. Тобто

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\sim\frac{1}{3}x^{1/3}, x\to0.$$

Навчальна задача 7.8. Визначити порядок росту і головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)$ щодо функції $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \dfrac{x^5}{1+x+2x^2}, \beta(x) = x, x \to \infty;$

2) $\alpha(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}, \beta(x) = \dfrac{1}{x-1}, x \to 1.$

❍ 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^5}{1+x+2x^2}}{x^k} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{5-k}}{1+x+2x^2} = \begin{cases} \infty, & 5-k>2, \\ \dfrac{1}{2}, & 5-k=2, \\ 0, & 5-k<2. \end{cases}$

Отже, н. в. ф. $\alpha(x)$ має порядок $5-2=3$ щодо н. в. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$; головна частина $\dfrac{1}{2}x^3$. Тобто

$$\frac{x^5}{1+x+2x^2} \sim \frac{x^3}{2}, x \to \infty.$$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}}{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^k} = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{k-2}\ln(1+(x-1)) =$

$$= \lim_{x\to 1}(x-1)^{k-2}(x-1) = \lim_{x\to 1}(x-1)^{k-1} = \begin{cases} 0, & k-1>0, \\ 1, & k-1=0, \\ \infty, & k-1<0. \end{cases}$$

Отже, н. в. ф. $\alpha(x)$ має порядок 1 щодо н. в. ф. $\beta(x) = \dfrac{1}{x-1}$, коли $x\to 1$; головна частина $\dfrac{1}{x-1}$. Тобто

$$\frac{\ln x}{(x-1)^2} \sim \frac{1}{x-1}, x \to 1. \ \bullet$$

Навчальна задача 7.9. Знайти асимптоти графіка функції $y = \ln\dfrac{x+1}{x-2}$.

❍ Область означення функції $D(y) = (-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.
Дослідімо поведінку функції, коли $x \to -1-0$:

$$\lim_{x\to -1-0} \ln\frac{x+1}{x-2} = -\infty.$$

Отже, пряма $x=-1$ є лівою вертикальною асимптотою графіка функції.
Дослідімо поведінку функції, коли $x \to 2+0$:

$$\lim_{x\to 2+0} \ln\frac{x+1}{x-2} = +\infty.$$

Отже, пряма $x = 2$ є правою вертикальною асимптотою графіка функції.

Дослідімо поведінку функції, коли $x \to -\infty$, шукаючи там похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-2} = 0,$$
$$b_- = \lim_{x\to-\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x-2} - 0 \right) = 0.$$

Так само, $k_+ = 0, b_+ = 0$. Отже, $y = 0$ є горизонтальною (двобічною) асимптотою графіка функції.●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin x)$;

2) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt[3]{x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) + 8\cos x}$.

❍ 1) 0; 2) 2.●

Задача 7.2. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3\operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x} - 2}$;

5) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}$.

7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$; 8) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}$.

❍ 1) 3; 2) 0; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) 12; 5) 0; 6) $\dfrac{1}{4}$; 7) $-\sin a$; 8) $-\dfrac{1}{\sin^2 a}$.●

Задача 7.3. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(2x\operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

❍ 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) -2; 3) $-\dfrac{1}{2}$.●

Задача 7.4. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_2 \dfrac{10 + x}{5 + x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln\cos\dfrac{\pi}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

❍ 1) $\dfrac{5}{\ln 2}$; 2) $-\dfrac{\pi^2}{2}$; 3) $\dfrac{1}{a}$; 4) $3\ln 2$; 5) $\dfrac{3}{2}$. ●

Задача 7.5. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\right)$.

❍ 1) 5; 2) 2; 3) $\ln 4$. ●

Задача 7.6. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $a>0$.

❍ 1) $\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{2\sqrt[n]{a}}{na}$. ●

Задача 7.7. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$;

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\cos x}$.

❍ 1) $+\infty$; 2) 0; 3) e^{km}; 4) e^8; 5) e; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. ●

Задача 7.8. Визначте порядок мализни і головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$:

1) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$;

2) $\alpha(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$.

❍1) $k = \frac{1}{2}$, головна частина $\left(-x^{1/2}\right), x \to 0$; 2) $k = \frac{2}{3}$, головна частина $\left(-2x^{2/3}\right), x \to 0$. ●

Задача 7.9. Визначте порядок росту і головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ щодо функції $\beta(x) = x$, коли $x \to \infty$.

❍ $k = 2$, головна частина $x^2, x \to \infty$. ●

Задача 7.10. Знайдіть асимптоти графіка функції $y = x \operatorname{arctg} 2x$.

❍Графік функції має похилі асимптоти: ліву $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$ та праву асимптоту $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$. ●