Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Яку точку звуть точкою розриву функції?
2. Як класифікують точки розриву?
3. Чим відрізняються усувні і неусувні точки розриву 1-го роду? Наведіть геометричну інтерпретацію.
4. Наведіть приклади точок розриву 2-го роду. Зобразіть поведінку функції в околі точок розриву 2-го роду.
5. Яку функцію звуть неперервною на відрізку $[a;b]$? Як позначають множину всіх неперервних на $[a;b]$ функцій?
6. Сформулюйте першу теорему Ваєрштраса. Чи може неперервна на відрізку функція f бути необмеженою на ньому?
7. Сформулюйте першу теорему Больцано — Коші. Чи може неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f $(f(a) < 0, f(b) > 0)$ мати: більш ніж один корінь? не мати коренів?
8. Сформулюйте другу теорему Больцано — Коші. Чи існує в неперервної на $[a;b]$ функції $y = f(x)$ таке значення C $(A \le C \le B)$, що функція набуває його: двічі? жодного разу? лише один раз?
9. Наведіть приклад функції (можна графічно), що набуває всі свої проміжні значення, але не є неперервною на відрізку.
10. Сформулюйте другу теорему Ваєрштраса.
11. Опишіть метод наближеного знаходження кореня рівняння $f(x) = 0$ (метод половинного поділу). На якій теоремі про неперервні на відрізку функції він ґрунтується?
12. За яких умов функція $y = f(x)$ має обернену? Сформулюйте теорему про неперервність оберненої функції.

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 8.1.

Дослідити на неперервність функцію:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

2) $f(x) = e^{1/x}$;

3) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ (x-1)^2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & x > 2; \end{cases}$

4) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

❍ 1) Функція f — елементарна; область означення функції $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отже, $x_0 = 0$ — точка розриву.

З'ясуймо тип цієї точки розриву. Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1, x_0=0\notin D(f),$$

то точка $x_0=0$ є точкою розриву 1-го роду, усувного (рис. 8.18).

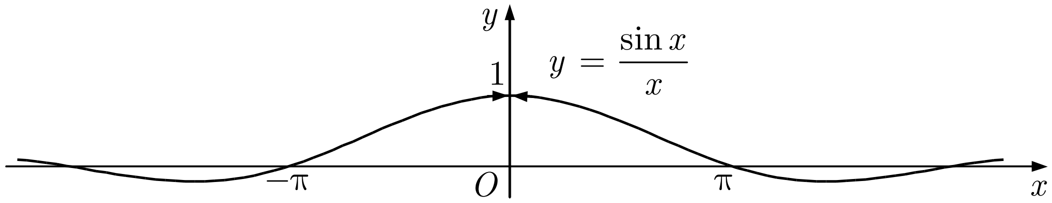

Рис. 8.18

Функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ можна доозначити в точці $x_0=0$ таким чином, щоб вона була неперервної на $\mathbb{R}$. Інакше кажучи, якщо покласти

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

то функція g буде неперервною на $\mathbb{R}$.

2) Функція f елементарна; область означення $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Отже, функція f має розрив у точці $x_0=0$. З'ясуймо тип цього розриву:

$$\lim_{x\to -0}e^{1/x}=0;$$

$$\lim_{x\to +0}e^{1/x}=+\infty.$$

Оскільки обидві границі існують і одна з них нескінченна, то $x_0=0$ — точка розриву 2-го роду, нескінченного (див. рис. 8.5). Графік функції має в точці $x_0=0$ праву вертикальну асимптоту.

3) Функція f — неелементарна, означена різними аналітичними виразами на різних проміжках. Ці вирази означені на тих проміжках, на яких вони «працюють», область означення $D(f)=\mathbb{R}$. Отже, єдині можливі точки розриву — це точки $x_1=0$ та $x_2=2$, де міняються аналітичні вирази для функції f.

Дослідімо точку $x_1=0$. Обчислімо $f(0)=(0-1)^2=1$. Знайдімо:

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(1-x^2)=1;$$

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(x-1)^2=1.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(-0), f(+0)$ і

$$f(+0)=f(-0)=1=f(0),$$

то функція f неперервна в точці $x_1=0$ (рис. 8.19).

Дослідімо точку $x_2=2$. Обчислімо $f(2)=(2-1)^2=1$. Знайдімо

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1;$$

$$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}(4-x)=2.$$

Оскільки існують скінченні границі $f(2-0), f(2+0)$ і
$$f(2-0)=1\neq 2=f(2+0),$$
то точка $x_2=2$ є точкою розриву 1-го роду, неусувного, зі стрибком
$$\delta=f(2+0)-f(2-0)=2-1=1.$$

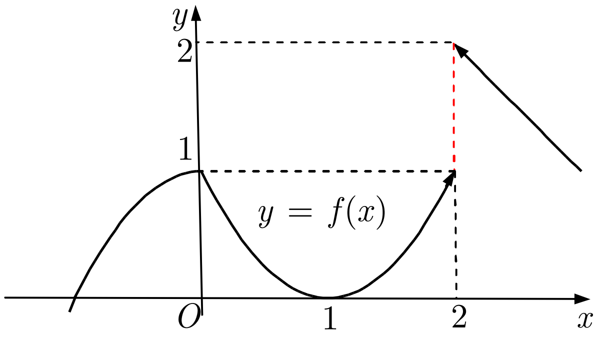

Рис. 8.19

4) Функція f елементарна, область означення $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Доведімо, користуючись означенням границі функції за Гейне, що не існує $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$. Для цього будуймо дві послідовності значень аргументу:
$$\{x_n'\}=\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right\}=\frac{2}{\pi},\frac{2}{5\pi},\frac{2}{9\pi},\ldots,\frac{2}{\pi+2\pi n},\ldots;$$
$$\{x_n''\}=\left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}=\frac{1}{2\pi},\frac{1}{4\pi},\frac{1}{6\pi},\ldots,\frac{1}{2\pi n}.$$

Обидві послідовності збігаються до нуля. Запишімо послідовності значень функції f:
$$f(x_n')=1,1,1,\ldots,1,\ldots;$$
$$f(x_n'')=0,0,0,\ldots,0,\ldots$$

Границями цих послідовностей будуть 1 та 0 відповідно. Отже, не існує $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ і точка $x_0=0$ є точкою розриву 2-го роду, істотного (див. рис. 8.4).●

Навчальна задача 8.2.

Дослідити на неперервність функцію $f(x)$ і побудувати схематично її графік:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$;

2) $f(x)=\begin{cases}3, & x\le -1,\\ 3^{-x}, & -1<x<0,\\ x^2, & x\ge 0.\end{cases}$

❍ 1) Функція $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ означена в усіх точках, за винятком $x = -2$, а отже, і неперервна в них. Щоб визначити характер розриву в точці $x = -2$ (у ній порушена умова неперервності — функція неозначена), знайдімо однобічні границі функції в цій точці:

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2-0} (x - 2) = -4;$$
$$\lim_{x \to -2+0} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2+0} (x - 2) = -4.$$

Оскільки $f(-2 - 0) = f(-2 + 0)$, то точка $x = -2$ є точкою розриву 1-го роду, усувного.

«Усуньмо» розрив. Функція

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2, \\ -4, & x = -2 \end{array} \right\} = x - 2$$

— неперервна.

Будуймо графік функції $y = f(x)$ (рис. 8.20).

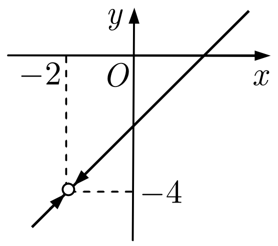

Рис. 8.20

2) Функцію $f(x)$ задано різними аналітичними виразами на різних проміжках. Кожен з цих виразів — функція неперервна в усіх точках області означення. Тому розгляньмо точки $x_1 = -1$ та $x_2 = 0$ і визначмо їх характер.

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} 3 = 3;$$
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} 3^{-x} = 3;$$
$$f(-1) = 3.$$

Оскільки

$$f(-1 - 0) = f(-1 + 0) = f(-1),$$

то в точці $x_1 = -1$ функція $f(x)$ неперервна.

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} 3^{-x} = 1;$$
$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} x^2 = 0.$$

Оскільки існують, але не рівні між собою, однобічні границі, то $x_2 = 0$ — точка розриву 1-го роду, неусувного, зі стрибком

$$\delta = f(0 + 0) - f(0 - 0) = -1.$$

Будуймо графік функції $y = f(x)$ (рис. 8.21).●

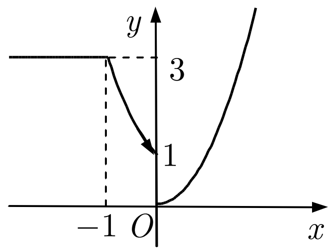

Рис. 8.21

Навчальна задача 8.3. Означити, не користуючись знаком границі, функцію $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + x^{2n}}{2 + x^{4n}}$ і побудувати її графік.

❍ При кожному значенні x, що справджує нерівність $|x| < 1$,

$$x^{2n} \to 0, x^{4n} \to 0, n \to \infty.$$

Отже, $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

При кожному значенні x, що справджує нерівність $|x| > 1$,

$$x^{2n} \to +\infty, x^{4n} \to +\infty, n \to \infty.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + x^{2n}}{2 + x^{4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-4n} + x^{-2n}}{2x^{-4n} + 1} = 0.$$

При $|x| = 1$ і будь-якому n:

$$x^{2n} = x^{4n} = 1.$$

Отже, $f(x) = \dfrac{2}{3}$. Функцію f можна задати як

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & |x| < 1, \\ \dfrac{2}{3}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Графік її зображено на рис. 8.22.●

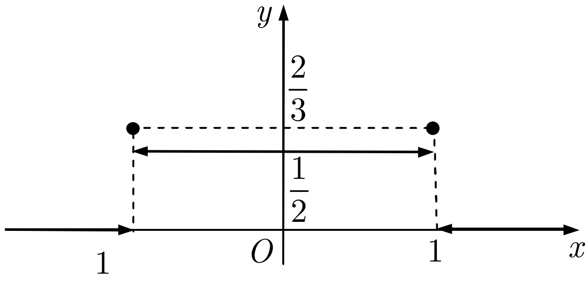

Рис. 8.22

Навчальна задача 8.4.

Знайти з точністю $0{,}1$ корінь рівняння $x^4 + x^3 - 1 = 0$ на відрізку $[0;1]$.

❍ Нехай $f(x) = x^4 + x^3 - 1$. Ця функція неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$, а, отже, і на $[0;1]$. Оскільки $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$, то за теоремою Больцано — Коші

$$\exists c \in (0;1) : f(c) = 0,$$

тобто рівняння $f(x) = 0$ має корінь на $[0;1]$. Знайти корінь з точністю $0{,}1$ означає вказати відрізок $[a;b]$ завдовжки $b - a \le 0{,}1$, який містить корінь рівняння.

Щоб знайти наближене значення кореня скористаємось методом половинного поділу.

Крок 1. Покладімо $a = 0, b = 1$. Обчислімо

$$f(a) = f(0) = -1, f(b) = f(1) = 1.$$

Перевірмо

$$f(a)f(b) = -1 \cdot 1 = -1 < 0,$$
$$\left|b - a\right| = 1 > 0{,}1.$$

Крок 2. Обчислімо

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Крок 3. Обчислімо

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{16}.$$

Перевірмо

$$f(x_1)f(a) = -\frac{13}{16} \cdot (-1) = \frac{13}{16} > 0;$$
$$f(x_1)f(b) = -\frac{13}{16} \cdot 1 = -\frac{13}{16} < 0.$$

Покладімо $a_1 = x_1 = \dfrac{1}{2}, b_1 = b = 1$. Перевірмо

$$\left|a_1 - b_1\right| = \frac{1}{2} > 0{,}1.$$

Крок 4. Обчислімо

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Крок 5. Обчислімо

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{67}{256}.$$

Перевірмо

$$f(x_2)f(a_1) = -\frac{67}{256}\cdot\left(-\frac{13}{16}\right) > 0;$$

$$f(x_2)f(b_1) = -\frac{67}{256}\cdot 1 < 0.$$

Покладімо $a_2 = x_2 = \frac{3}{4}, b_2 = b_1 = 1.$

Перевірмо

$$\left|a_2 - b_2\right| = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

Крок 6. Обчислімо

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{7}{8}\ldots$$

Врешті-решт дістанемо: $x = 0,81$ з точністю $\varepsilon = 0,1.$ ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Дослідіть функцію f на неперервність на відрізках $[0;2],[-3;1],[4;5]$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

❍ 1) функція неперервна на відрізку $[4;5]$, має одну точку розриву 2-го роду, нескінченного, $x = 1$ на відрізку $[0;2]$ і дві точки розриву 2-го роду, нескінченних, $x = \pm 1$ на відрізку $[-3;1]$;

2) функція неперервна на відрізку $[4;5]$, на відрізку $[0;2]$ має одну точку розриву 2-го роду, нескінченного, а на відрізку $[-3;1]$ — дві точки розриву 2-го роду, нескінченних, $x_1 = -3, x_2 = 1$. ●

Задача 8.2. Дослідіть на неперервність функцію f, визначте характер її точок розриву, побудуйте схематично її графік:

1) $f(x) = \dfrac{3}{7^{\frac{1}{x+1}} + 3}$;

2) $f(x) = \dfrac{2}{1 - 3^{3+x}}$;

3) $f(x) = \dfrac{3}{\log_2\left|x + 1\right|}$;

4) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ \frac{1}{x-3}, & x>1;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}e^{x+3}, & x\le -3,\\ 10-x^2, & \left|x\right|\le 3,\\ 2^{\frac{1}{x-2}}, & x>3;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} 2x, & x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{\pi}{2x+3}, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

❍ 1) $x=-1$ — точка розриву 1-го роду, неусувного; 2) $x=-3$ — точка розриву 2-го роду, нескінченного; 3) $x=-1$ — точка розриву 1-го роду, усувного, $x=-2$, $x=0$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного; 4) $x=0, x=1$ — точки розриву 1-го роду, неусувного, $x=3$ — точка розриву 2-го роду, нескінченного; 5) $x=3$ — точка розриву 1-го роду, неусувного; 6) $x=\dfrac{1}{2}$ — точка розриву 1-го роду, усувного. ●

Задача 8.3. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 1,\\ 3-ax^2, & x>1.\end{cases}$$

Виберіть число a так, щоб функція f стала неперервною. (Побудуйте її графік).

❍ $a=1$. ●

Задача 8.4. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ A\sin x+B, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Підберіть числа A та B так, щоб функція f стала неперервною; побудуйте її графік.

❍ $A=-1, B=1$. ●

Задача 8.5. Функція $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ не означена при $x=1$. Якою має бути значення $f(1)$, щоб доозначена цим значенням функція стала неперервною при $x=1$?

❍ $\frac{2}{3}$. ●

Задача 8.6. Якого роду розриви мають функції $y = \frac{\sin x}{x}$ та $y = \frac{\cos x}{x}$ при $x = 0$? Вкажіть характер графіків цих функцій в околі точки $x = 0$.

❍ Функція $y = \frac{\sin x}{x}$ має в точці $x = 0$ розрив 1-го роду, усувний, функція $y = \frac{\cos x}{x}$ — розрив 2-го роду, нескінченний. ●

Задача 8.7. Дослідіть на неперервність функцію і побудуйте її графік:

1) $y = \frac{1}{\ln|x|}$;   2) $y = \{x\}$;

3) $y = \frac{1}{\{x\}}$;   4) $y = (-1)^{[x]}$.

❍ 1) $x = 0$ — точка розриву 1-го роду, усувного, $x = \pm 1$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного; 2), 4) $x \in \mathbb{Z}$ — точки розриву 1-го роду, неусувного; 3) $x \in \mathbb{Z}$ — точки розриву 2-го роду, нескінченного. ●

Задача 8.8. Використовуючи властивість неперервних функцій, покажіть, що рівняння $x^3 - 2x - 2 = 0$ має в інтервалі $(1;2)$ принаймні один дійсний корінь. Обчисліть його з точністю $0,01$.

❍ $\approx 1,77$. ●

Задача 8.9. Використовуючи властивість неперервних функцій, покажіть, що рівняння $x^3 - 6x + 2 = 0$ має дійсні корені на проміжках $(-3;-2)$, $(0;1)$, $(2;3)$. Обчисліть їх з точністю $0,001$.

❍ $-2,602; 0,340; 2,262$. ●