Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення похідної функції $f(x)$ у точці x_0?

2. Як знайти похідну, виходячи з її означення?

3. Наведіть похідні елементарних функцій: $C, x^{\alpha}, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.

4. Сформулюйте означення однобічних похідних функції в точці.

5. Яку функцію звуть диференційовною в деякому околі точки x_0? Який зв'язок між диференційовністю функції в точці й існуванням скінченної похідної в точці?

6. Чи є диференційовна функція неперервною? Чи є неперервна функція завжди диференційовною?

7. Сформулюйте означення диференціала функції в точці і запишіть формулу його обчислення.

8. Який геометричний і фізичний зміст похідної та диференціала?

9. Запишіть рівняння дотичної до кривої в разі скінченної і нескінченної похідної.

10. Запишіть рівняння нормалі до кривої в разі скінченної і нескінченної похідної.

11. Що звуть кутом між кривими?

12. Сформулюйте основні властивості диференціала.

2. Розв'язання навчальних задач

Навчальна задача 9.1. Користуючись означенням, знайти похідну в точці x_0 функції $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$. Обчислити $f'(1)$.

❍ Скористаємось схемою п. 9.1.2.

$$f(x_0 + \Delta x) = 4(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 8 =$$
$$= 4x_0^2 - 3x_0 + 8 + 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{8x_0\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} =$$
$$= 8x_0 - 3 + 4\Delta x.$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(8x_0 - 3 + 4\Delta x) = 8x_0 - 3.$$

$$f'(1) = 5. \ \bullet$$

Навчальна задача 9.2. Знайти похідну функції:

1) $f(x) = x^4$;   2) $f(x) = \sqrt{x}$;

3) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$;   4) $f(x) = 5x^3$;

5) $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$; 6) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$;

7) $f(x) = -\dfrac{5}{4x^3}$.

❍ Для розв'язання прикладів стануть у пригоді формули:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}, \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}.$$

1) $f'(x) = (x^4)' = \left|\alpha = 4\right| = 4x^3$.

2) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \left|\alpha = \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3) $f'(x) = (\sqrt[4]{x^3})' = (x^{3/4})' = \left|\alpha = \dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4}x^{-1/4} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Нагадаймо, що сталий множник можна виносити за знак похідної.

$$(Cu)' = Cu'.$$

4) $f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

5) $f'(x) = \left(\dfrac{8}{x^2}\right)' = 8(x^{-2})' = 8 \cdot (-2)x^{-3} = -\dfrac{16}{x^3}$.

6) $f'(x) = (4\sqrt[3]{x^2})' = 4(x^{2/3})' = 4 \cdot \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}}$.

7) $f'(x) = \left(-\dfrac{5}{4x^3}\right)' = -\dfrac{5}{4}(x^{-3})' = -\dfrac{5}{4} \cdot (-3)x^{-4} = \dfrac{15}{4x^4}$. ●

Навчальна задача 9.3.

Знайти похідну функції:

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$;

2) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$;

3) $f(x) = e^x \sin x$;

4) $f(x) = 2^x \log_2 x$;

5) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$.

❍ 1) Користуючись правилами диференціювання:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', (Cu)' = Cu', (C)' = 0, C = \text{const},$$

і формулою $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, маємо

$$f'(x) = (3x^2 - 5x + 1)' = 3(x^2)' - 5(x)' + (1)' = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5.$$

2) Перепишімо функцію у вигляді, зручному для диференціювання:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} = 3x^{1/3} + 2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}.$$

Отже,

$$f'(x) = \left(3x^{1/3} + 2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}\right)' = 3\left(x^{1/3}\right)' + 2(x^{-1})' - \frac{1}{2}(x^{-2})' =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3} + 2 \cdot (-1)x^{-2} - \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

3) Користуючись правилом диференціювання

$$(uv)' = u'v + uv'$$

і формулами: $(e^x)' = e^x, (\sin x)' = \cos x,$ маємо

$$f'(x) = (e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x =$$

$$= e^x(\sin x + \cos x).$$

4) Користуючись формулами диференціювання:

$$(2^x)' = 2^x \ln x, (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2},$$

маємо

$$f'(x) = (2^x \log_2 x)' = (2^x)' \log_2 x + 2^x (\log_2 x)' = 2^x \ln 2 \cdot \log_2 x + \frac{2^x}{x \ln 2}.$$

5) Користуючись правилом диференціювання

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

і формулами:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

маємо

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}\right)' = \frac{(\operatorname{tg} x)' \ln x - \operatorname{tg} x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \ln x - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x \ln x - \sin x \cdot \cos x}{x \ln^2 x \cdot \cos^2 x}. \bullet$$

Навчальна задача 9.4.

Знайти похідну функції:

1) $f(v) = \operatorname{tg} v \cdot \sin a$;

2) $\rho(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$;

3) $s(t) = \ln t + \operatorname{ctg} 3$.

❍ 1) $f'(v) = (\operatorname{tg} v \cdot \sin a)' = \sin a \cdot (\operatorname{tg} v)' = \dfrac{\sin a}{\cos^2 v}$.

2) $\rho'(\varphi) = (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)' = \sin \varphi + \varphi \cos \varphi - \sin \varphi = \varphi \cos \varphi$.

3) $s'(t) = \left(\ln t + \operatorname{ctg} 3\right)' = \dfrac{1}{t} + 0 = \dfrac{1}{t}$. ●

Навчальна задача 9.5. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = x^2 - 6x + 4$ в точках $M_1(4;-4)$ та $M_2(3;-5)$.

❍ Знайдімо:

$$f'(x) = 2x - 6;\ f'(x_1) = 2;\ f'(x_2) = 0.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_1 має рівняння

$$y - (-4) = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 12.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_2 має рівняння

$$y - (-5) = 0(x - 3) \Rightarrow y = -5.$$

Нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M_1 має рівняння

$$y - (-4) = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці M_2 має рівняння

$$x = 3. \text{ ●}$$

Навчальна задача 9.6. Визначити, в якій точці дотична до параболи $y = x^2$:
1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;
2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$;
3) творить із прямою $3x - y + 1 = 0$ кут $\dfrac{\pi}{4}$.

❍ Нехай точка дотику $M_0(x_0; y_0)$. Тоді:

$$k_{\text{дот.}} = y'(x_0) = 2x_0.$$

1) У паралельних прямих рівні кутові коефіцієнти. Отже,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 2^2 = 4.$$

Тобто дотична до параболи $y = x^2$ паралельна прямій $y = 4x - 5$ у точці $M_0(2; 4)$.

2) Кутовий коефіцієнт прямої

$$2x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6},$$

дорівнює $\dfrac{1}{3}$.

У перпендикулярних прямих кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням

$$k_1 k_2 = -1.$$

Отже,

$$k_{\text{дот.}} = 2x_0 = -3 \Rightarrow x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Тобто дотична до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$ в точці $M_0\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

3) Кутовий коефіцієнт прямої

$$3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1$$

дорівнює $\frac{1}{3}$.

Кут між прямими на площині можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \left|\frac{2x_0 - \frac{1}{3}}{1 + 2x_0 \cdot \frac{1}{3}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{6x_0 - 1}{2x_0 + 3}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ x_0 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_0 &= \frac{1}{16}. \end{aligned}\right.$$

Тобто дотична до параболи $y = x^2$ творить кут $\frac{\pi}{4}$ із прямою $3x - y + 1 = 0$ в точках $M_1(1;1)$ та $M_2\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right)$. ●

Навчальна задача 9.7.

Визначити, під яким кутом перетинаються гіпербола $y = \frac{1}{x}$ із параболою $y = \sqrt{x}$.

❍ Знайдімо точки перетину гіперболи та параболи:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1.$$

Кут між кривими — це кут між дотичними до кривих у точці дотику.

Знайдімо кутові коефіцієнти дотичних:

$$k_1 = (\sqrt{x})'\big|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2};$$

$$k_2 = \left.\left(\frac{1}{x}\right)'\right|_{x=1} = \left.-\frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = -1.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)}\right| = 3 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 3. \bullet$$

Навчальна задача 9.8.

1) Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 + 3t + 1$ (м). Визначити його швидкість у момент $t = 4$ с.
2) Кількість електрики, що протікає через провідник, починаючи з моменту $t = 0$, задано формулою $q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (Кл). Знайти силу струму наприкінці п'ятої секунди.

❍ 1) Швидкість руху тіла є похідною від пройденого шляху. Отже,

$$v(t) = s'(t) = (t^2 + 3t + 1)' = 2t + 3 \Rightarrow v(4) = 11\,(\text{м/с}).$$

2) Сила струму є похідною від кількості електрики, що протікає через провідник. Отже,

$$I(t) = q'(t) = (2t^2 + 3t + 1)' = 4t + 3 \Rightarrow I(5) = 23 \text{ (А)}. \bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.1.

Знайдіть похідну і диференціал функції:

1) $f(x) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1;$

2) $f(x) = ax^2 + bx + c;$

3) $f(y) = 2\sqrt{y} - \dfrac{1}{y} + \sqrt[4]{3};$

4) $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1);$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1};$

6) $s(t) = \dfrac{3t^2 + 1}{t - 1}.$

❍ 1) $f'(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 0,3;$

2) $f'(x) = 2ax + b;$

3) $f'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{y^2};$

4) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9;$

5) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

6) $s(t) = \dfrac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$. ●

Задача 9.2. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{1-\cos x}$;

3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

4) $\rho(\varphi) = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi$.

❍ 1) $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{\sin^2 x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$; 4) $\rho'(\varphi) = \varphi\cos\varphi$. ●

Задача 9.3. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 \log_3 x$;

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{\lg x}$;

3) $f(x) = x\sin x \ln x$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{4^x}$;

6) $f(x) = x\cdot 10^x$;

7) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$;

8) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$;

9) $f(x) = (x^2-2x+3)e^x$;

10) $f(x) = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

❍ 1) $f'(x) = 2x\log_3 x + \dfrac{x}{\ln 3}$; 2) $f'(x) = \dfrac{x\ln 10\lg x - x + 1}{x\ln 10\lg^2 x}$;

3) $f'(x) = \sin x\ln x + x\cos x\ln x + \sin x$;

4) $f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$;

5) $f'(x) = 4^{-x}(1 - x\ln 4)$; 6) $f'(x) = 10^x(1 + x\ln 10)$;

7) $f'(x) = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; 8) $f'(x) = -\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$;

9) $f'(x) = e^x(x^2 + 1)$; 10) $f'(x) = -\dfrac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(1 + 10^x)^2}$. ●

Задача 9.4. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у заданій точці:

1) $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$;

2) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2$.

❍ 1) $x - 4y + 4 = 0,\ 4x + y - 18 = 0$; 2) $y - 5 = 0,\ x + 2 = 0$. ●

Задача 9.5. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

❍ $(1;1), (-1;-1)$. ●

Задача 9.6. Під якими кутами перетинаються парабола $y = x^2$ та пряма $3x - y - 2 = 0$?

❍ $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}, \alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{13}$. ●

Задача 9.7. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = (9t - t^3)$ м. Знайдіть швидкість руху для моментів $t = 1$ с та $t = 2$ с.

❍ 6 м/с; -3 м/с. ●