Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Сформулюйте правило диференціювання складеної функції $y = f(u(x))$.

2. Який зв'язок між похідними функції $y = f(x)$ і оберненої до неї функції $x = f^{-1}(y)$?

3. Що звуть логарифмічною похідною функції? До яких функцій доцільно застосовувати логарифмічну похідну?

4. Запишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.

5. Сформулюйте основні правила диференціювання.

6. Як знаходять похідну неявної функції?

7. Сформулюйте правило диференціювання функцій, заданих параметрично.

8. У чому полягає інваріантність форми першого диференціала?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 10.1. Знайти похідну функції (диференціювання тригонометричних функцій):

1) $f(x) = \sin 3x$; 2) $f(x) = \cos lx$;

3) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} qx$;

5) $f(x) = \sin(2x^2)$; 6) $f(x) = \cos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

7) $f(x) = 3(\sin x)^2$; 8) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}$; 10) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}$;

11) $f(x) = x^3 \sin x$; 12) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{2x^2}$.

❍ Використаймо похідні від тригонометричних функцій:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$
$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

1) $f'(x) = (\sin 3x)' = \underset{u=3x}{(\sin u)'} = \underbrace{\cos 3x}_{\text{похідна синуса}} \cdot \underbrace{(3x)'}_{\text{похідна аргументу}} = 3\cos 3x.$

2) $f'(x) = (\cos lx)' = -\sin lx \cdot (lx)' = -l \sin lx.$

3) $f'(x) = \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)'}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}.$

4) $f'(x) = (\operatorname{ctg} qx)' = -\dfrac{(qx)'}{\sin^2 qx} = -\dfrac{q}{\sin^2 qx}$.

5) $f'(x) = [\sin(2x^2)]' = \cos(2x^2)\cdot(2x^2)' = 4x\cos 2x^2$.

6) $f'(x) = \left[\cos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]' =$

$$= -\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left[(1+x^2)^{-1/2}\right]' = -\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-3/2}\times$$

$$\times(1+x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

7) $f'(x) = [3(\sin x)^2]' \underset{u=\sin x}{=} (3u^2)' =$

$$= 3\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)' = 6\sin x\cdot\cos x = 3\sin 2x.$$

8) $f'(x) = (\sqrt{\operatorname{tg} 3x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}(\operatorname{tg} 3x)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}\frac{(3x)'}{\cos^2 3x} = \frac{3}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}\cos^2 3x}.$$

9) $f'(x) = \left[\dfrac{1}{\cos^3 x}\right]' = \left[(\cos x)^{-3}\right]' = -3(\cos x)^{-4}(\cos x)' = \dfrac{3\sin x}{\cos^4 x}$.

10) $f'(x) = \left[\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}\right]' = \dfrac{(\sin^2 x + 3\cos^2 4x)'}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}} =$

$$= \frac{2\sin x\cdot\cos x + 3\cdot 2\cos 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}} = \frac{\sin 2x - 12\sin 8x}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 4x}}.$$

11) $f'(x) = [x^3\sin x]' =$

$$= (x^3)'\sin x + x^3(\sin x)' = 3x^2\sin x + x^3\cos x.$$

12) $f'(x) = \left[\dfrac{\operatorname{ctg} x}{2x^2}\right]' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x^2}\right)' =$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\operatorname{ctg} x)'x^2 - \operatorname{ctg} x\cdot(x^2)'}{x^4} = \frac{-\dfrac{x^2}{\sin^2 x} - 2x\operatorname{ctg} x}{2x^4} = -\frac{x + \sin 2x}{2x^3\sin^2 x}. \bullet$$

Навчальна задача 10.2.

Знайти похідну функції (диференціювання обернених тригонометричних функцій):

1) $f(x) = \arcsin(2x)$;

2) $f(x) = \arcsin^2 3x$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

4) $f(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

5) $f(x) = \arccos(x^m)$;

6) $f(x) = \operatorname{arctg}^4\sqrt{x}$.

❍Використаймо формули похідних обернених тригонометричних функцій:

$$\boxed{\begin{aligned}(\arcsin u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\\ (\arccos u)' &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\\ (\operatorname{arctg} u)' &= \frac{u'}{1+u^2};\\ (\operatorname{arcctg} u)' &= -\frac{u'}{1+u^2}.\end{aligned}}$$

1) $f'(x) = \left[\arcsin(2x)\right]' = \dfrac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2) $f'(x) = \left[\arcsin^2 3x\right]' = [(\arcsin 3x)^2]' =$

$$= 2\arcsin 3x \cdot (\arcsin 3x)' =$$

$$= 2\arcsin 3x \cdot \frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = 2\arcsin 3x \cdot \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{6\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

3) $f'(x) = \left[\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]' = \dfrac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

4) $f'(x) = \left[\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]' =$

$$= -\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x^3}} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

5) $f'(x) = \left[\arccos x^m\right]' = -\dfrac{(x^m)'}{\sqrt{1-x^{2m}}} = -\dfrac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^{2m}}}$.

6) $f'(x) = \left[\operatorname{arctg}^4\sqrt{x}\right]' = [(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^4]' =$

$= 4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}\cdot(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = 4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}\cdot\dfrac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \dfrac{2\operatorname{arctg}^3 x}{(1+x)\sqrt{x}}$.●

Навчальна задача 10.3.

Знайти похідні функції (диференціювання показникових функцій):

1) $f(x) = a^{3x}, a > 0;$

2) $f(x) = 7^{\frac{1}{4x}};$

3) $f(x) = 2^{x^2};$

4) $f(x) = 4^{\sin^2 x};$

5) $f(x) = e^{x^4};$

6) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x+2}};$

7) $f(x) = e^{\sqrt{\sin x}};$

8) $f(x) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6);$

9) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x};$

10) $f(x) = e^{\arcsin^2 x}.$

❍Стануть у пригоді формули диференціювання показникової функції:

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a > 0;$$

$$(e^u)' = e^u u'.$$

1) $f'(x) = \left[a^{3x}\right]' = a^{3x} \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a.$

2) $f'(x) = \left[7^{\frac{1}{4x}}\right]' = 7^{\frac{1}{4x}} \ln 7 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right).$

3) $f'(x) = \left[2^{x^2}\right]' = 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x.$

4) $f'(x) = \left[4^{\sin^2 x}\right]' = 4^{\sin^2 x} \ln 4 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x.$

5) $f'(x) = \left[e^{x^4}\right]' = e^{x^4} \cdot 4x^3.$

6) $f'(x) = \left[e^{\sqrt{x^2+x+2}}\right]' = e^{\sqrt{x^2+x+2}} \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}.$

7) $f'(x) = \left[e^{\sqrt{\sin x}}\right]' = e^{\sqrt{\sin x}} \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$

8) $f'(x) = \left[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\right]' =$

$$= (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' =$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6) = e^x x^3.$$

9) $f'(x) = \left[e^{\operatorname{tg} x}\right]' = e^{\operatorname{tg} x}\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

10) $f'(x) = \left[e^{\arcsin^2 x}\right]' = e^{\arcsin^2 x}\cdot\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$ ●

Навчальна задача 10.5.

Знайти похідну функції (диференціювання логарифмічних функцій):

1) $f(x) = \log_2(5x+4);$

2) $f(x) = \ln^5 x;$

3) $f(x) = \log_3 \sin x;$

4) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} x;$

5) $f(x) = x\ln x;$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x};$

7) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

❍Стануть у пригоді формули диференціювання логарифмів:

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}, a > 0, a \neq 1,$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

1) $f'(x) = \left[\log_2(5x+4)\right]' = \dfrac{5}{(5x+4)\ln 2}.$

2) $f'(x) = \left[\ln^5 x\right]' = 5\ln^4 x\cdot\dfrac{1}{x}.$

3) $f'(x) = \left[\log_3 \sin x\right]' = \dfrac{\cos x}{\sin x \ln 3}.$

4) $f'(x) = \left[\ln \operatorname{arctg} x\right]' = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}.$

5) $f'(x) = \left[x\ln x\right]' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1.$

6) $f'(x) = \left[\dfrac{\ln x}{x}\right]' = \dfrac{(\ln x)'x - \ln x\cdot(x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

7) $f'(x) = \left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$ ●

Навчальна задача 10.6.

Знайдіть похідну функції (диференціювання гіперболічних функцій):

1) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x;$

2) $f(x) = \operatorname{th}^3 x^2$;
3) $f(x) = \ln \operatorname{sh} x$;
4) $f(x) = \cos(\operatorname{cth} x)$.

❍ Стануть у пригоді формули диференціювання гіперболічних функцій:

$$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u', (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u',$$

$$(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}, (\operatorname{cth} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}.$$

1) $f'(x) = \left[\operatorname{sh}^2 x\right]' = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$

2) $f'(x) = \left[\operatorname{th}^3 x^2\right]' = 3 \operatorname{th}^2 x^2 \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2} \cdot 2x.$

3) $f'(x) = \left[\ln \operatorname{sh} x\right]' = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$

4) $f'(x) = \left[\cos(\operatorname{cth} x)\right]' = -\sin \operatorname{cth} x \cdot \left(-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) = \dfrac{\sin \operatorname{cth} x}{\operatorname{sh}^2 x}.$ ●

Навчальна задача 10.5.

Продиференціювати функції:
1) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
2) $f(x) = (2a + 3\cos 2x)^2, a = \text{const}$;
3) $f(x) = x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} - \arcsin^3 3x$;
4) $f(y) = \dfrac{\operatorname{tg} y^3}{\ln 3y}$;

❍1) $f'(x) = \left[\left(1 - x^2\right)^{1/2}\right]' = \dfrac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-1/2}(1 - x^2)' =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2) $f'(x) = \left[(2a + 3\cos 2x)^2\right]' = 2(2a + 3\cos 2x)(2a + 3\cos 2x)' =$

$$= 2(2a + 3\cos x)(-3\sin 2x)(2x)' = -12\sin 2x(2a + 3\cos x).$$

3) $f'(x) = \left[x(\operatorname{arctg} x)^{1/3} - (\arcsin 3x)^3\right]' =$

$$= x'(\operatorname{arctg} x)^{1/3} + x\left((\operatorname{arctg} x)^{1/3}\right)' - 3\arcsin^2 3x \cdot (\arcsin 3x)' =$$

$$= \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} + x \cdot \frac{1}{3}\frac{(\operatorname{arctg} x)'}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}} - 3\arcsin^2 3x \cdot \frac{(3x)'}{\sqrt{1 - 9x^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{3}\frac{x}{(1 + x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}} - \frac{9\arcsin^2 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

4) $f'(y)=\left[\dfrac{\operatorname{tg} y^3}{\ln 3y}\right]'=\dfrac{(\operatorname{tg} y^3)'\ln 3y-\operatorname{tg} y^3\cdot(\ln 3y)'}{\ln^2 3y}=$

$$=\frac{\dfrac{3y^2}{\cos^2 y^3}\ln 3y-\operatorname{tg} y^3\cdot\dfrac{3}{3y}}{\ln^2 3y}=\frac{3y^3\ln 3y-\sin y^3\cdot\cos y^3}{y\cos^2 y^3\cdot\ln^2 3y}.$$

Навчальна задача 10.6. Продиференціювати функції:

1) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}$;

2) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$.

1) Диференціюючи складену функцію буває зручним спершу її прологарифмувати.

$$f'(x)=f(x)\left(\ln\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}\right)'=$$

$$=f(x)(3\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(x-3)-2\ln(x+4))'=$$

$$=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}(x+4)^2}\left(\frac{3}{x+1}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}-\frac{2}{x+4}\right).$$

2) $f'(x)=f(x)(\ln(\cos x)^{\sin x})'=f(x)(\sin x\ln\cos x)'=$

$$=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).\ \bullet$$

Навчальна задача 10.7. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої неявно $x^3+y^3-3axy=0$.

❍ Перехід від неявного задавання функції до явного часто буває складним, а то й неможливим. Для знаходження похідної $y'=\frac{dy}{dx}$ **не рекомендовано** переходити від неявного задавання функції до явного.

Диференціюємо обидві частини рівності, що задає функцію $y(x)$ неявно, за x:

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0;$$

$$(3y^2-3ax)y'=-3x^2+3ay;$$

$$y'=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.\ \bullet$$

Навчальна задача 10.8. Знайти похідну параметрично функції $y(x):\begin{cases}x=\operatorname{tg} t+t,\\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t},\end{cases}$ $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ для довільного значення t і для $t=\dfrac{\pi}{4}$.

$$❍\ y'_x(t)=\frac{\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\dfrac{1}{\cos^2 t}+1}=\frac{2\sin t}{\cos t+\cos^3 t};$$

$$y'_x(x):\begin{cases}x=\operatorname{tg}t+t,\\ y'_x(t)=\dfrac{2\sin t}{\cos t+\cos^3 t};\end{cases}\ y'_x\ |_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}.●$$

Навчальна задача 10.9. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої L у точці $(2;2)$, якщо $L:\begin{cases}x=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2},\\ y=\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{2t^2}.\end{cases}$

❍Точці $(2;2)$ кривої відповідає значення параметра $t=1$.

$$y'_x(t)=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t+6}{2t+4};\ y'_x\ |_{t=1}=\frac{7}{6}.$$

Рівняння дотичної:

$$y=2+\frac{7}{6}(x-2);\ 6y-7x+2=0.$$

Рівняння нормалі:

$$y=2-\frac{6}{7}(x-2);\ 7y+6x-26=0.●$$

Навчальна задача 10.10. Знайти диференціал функції $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{ctg}3x}$.

$$❍f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{ctg}3x}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 3x}\right)\cdot 3=-\frac{3}{2\sin^2 3x\sqrt{1+\operatorname{ctg}3x}};$$

$$df(x)=-\frac{3dx}{2\sin^2 3x\sqrt{1+\operatorname{ctg}3x}}.●$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 10.1. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x)=\operatorname{ch}^3 x$;

2) $f(x)=\operatorname{sh}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{sh}^2 x$;

3) $f(x)=\operatorname{ch}\sin x$;

4) $f(x)=\sin(\operatorname{ch}x)$;

5) $f(x)=\ln\operatorname{ch}x$;

6) $f(x)=\ln\operatorname{th}x$;

7) $f(x)=\cos x\cdot\operatorname{ch}x+\sin x\cdot\operatorname{sh}x$;

8) $f(x)=\operatorname{th}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{th}^3 x$;

9) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$.

❍1) $3\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x$; 2) $\operatorname{ch} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sh} 2x$; 3) $\operatorname{sh}\sin x \cdot \cos x$; 4) $\cos\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x$; 5) $\operatorname{th} x$; 6) $\dfrac{2}{\operatorname{sh} 2x}$; 7) $2\cos x \cdot \operatorname{sh} x$; 8) $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^4 x}$; 9) $\dfrac{2\operatorname{sh} x \cdot \sin x}{(\operatorname{sh} x + \sin x)^2}$. ●

Задача 10.2. Напишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у заданій точці:

1) $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$;

2) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2$.

❍1) $x - 4y + 4 = 0, 4x + y - 18 = 0$; 2) $y - 5 = 0,\ x + 2 = 0$. ●

Задача 10.3. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

❍1) $(1;1), (-1;-1)$. ●

Задача 10.4. Під якими кутами перетинаються парабола $y = x^2$ та пряма $3x - y - 2 = 0$?

❍ $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}, \alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{13}$. ●

Задача 10.5. У якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;

2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 - 0$;

3) утворює із прямою $3x - y + 1 = 0$ кут 45°

❍1) $(2;4)$; 2) $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$; 3) $(-1;1)$ та $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{16}\right)$. ●

Задача 10.6. Знайдіть похідні y' функції $y(x)$, заданої неявно:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

3) $2y \ln y = x$;

4) $\cos(xy) = x$;

5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

6) $y = x + \operatorname{arctg} y$;

7) $x^y = y^x$.

❍ 1) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$; 2) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 3) $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$; 4) $-\dfrac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; 5) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$; 6) $\dfrac{1+y^2}{y^2}$; 7) $\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$. ●

Задача 10.7. Знайдіть похідну y'_x функції $y(x)$, заданої параметрично:

1) $x = a(\varphi - \sin\varphi), y = a(1-\cos\varphi)$;

2) $x = \dfrac{t+1}{t}, y = \dfrac{t-1}{t}$;

3) $x = \ln(1+t^2), y = t - \operatorname{arctg} t$;

4) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

❍ 1) $y'_x : x = a(\varphi - \sin\varphi), y'_x(\varphi) = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$;

2) $y'_x : x = 1 + \dfrac{1}{t}, y'_x(t) = -1$;

3) $y'_x : x = \ln(1+t^2), y'_x(t) = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. ●

Задача 10.8. Напишіть рівняння дотичної та нормалі до еліпса $x = 3\cos t,\ y = 4\sin t$, у точці $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right)$.

❍ $y + \dfrac{4}{3}x - 4\sqrt{2} = 0, y - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7\sqrt{2}}{8} = 0$. ●

Задача 10.9. Обчисліть наближено за допомогою 1-го диференціала:

1) $\operatorname{arctg} 1,02$; 2) $\operatorname{arctg} 0,97$;

3) $\arcsin 0,05$; 4) $\ln 1,2$.

❍ 1) $\approx 0,795$; 2) $\approx 0,770$; 3) $\approx 0,050$; 4) $\approx 0,182$.