Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення похідної n-го порядку. Як позначають похідні вищих порядків.

2. Які класи функцій позначають $C^n(a;b)$ і $C^\infty(a;b)$?

3. За якими формулами обчислюють похідну n-го порядку функцій $\sin x$ та $\cos x$?

4. Який механічний зміст має друга похідна?

5. Подайте правила обчислення похідної n-го порядку суми двох функцій та добутку сталої на функцію.

6. Запишіть Лейбніцову формулу диференціювання добутку двох функцій. Поясніть зміст символів C_n^k в цій формулі.

7. Чи існують формули похідних вищих порядків від функції, заданої параметрично? Запишіть формулу знаходження 2-ї похідної.

8. Як означують диференціал n-го порядку функції f?

9. Чи буде форма другого диференціала інваріантною?

10. Запишіть формулу обчислення n-го диференціала функції $f(x)$ від незалежної змінної x.

11. Чому дорівнюють другі диференціали функцій $e^x, \sin x, \cos x$?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 11.1. Знайти похідні вказаного порядку функції:

1) $f(x) = 5x^4, f'''(x)$;

2) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8, f^{(4)}(x)$;

3) $f(x) = \sin^2 x, f^{(5)}(x)$;

4) $f(x) = \sqrt{x+5}, f^{(4)}(x)$;

5) $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}), f''(x)$.

❍ 1) $f'(x) = 20x^3; f''(x) = 60x^2; f'''(x) = 120x$.

2) $f'(x) = 12x^3 + 15x^2 - 8x; f''(x) = 36x^2 + 30x - 8;$

$$f'''(x) = 72x + 30; f^{(4)}(x) = 72.$$

3) $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x; f''(x) = 2\cos 2x; f'''(x) = -4\sin 2x;$

$$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x; f^{(5)}(x) = 16\sin 2x.$$

4) $f(x) = (x+5)^{1/2}; f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+5)^{-1/2};$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+5)^{-3/2}; f'''(x) = \frac{3}{8}(x+5)^{-5/2}; f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+5)^{-7/2}.$$

5) $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}; f''(x) = -\dfrac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$. ●

Навчальна задача 11.2.

Знайти похідну:

1) $f^{(4)}(x), f(x) = (x^3 + 2)e^{4x+3}$;

2) $f^{(100)}(x), f(x) = (x^2 + 1)\cos 2x$;

3) $f^{(n)}(x), f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

❍Скористаємось Лейбніцовою формулою.

1) $u(x) = e^{4x+3}, v(x) = x^3 + 2, n = 4$.

$$((x^3 + 2)e^{4x+3})^{(4)} = \sum_{k=0}^{4} C_4^k (e^{4x+3})^{(4-k)}(x^3 + 2)^{(k)}.$$

$v^{(0)}(x) = v(x) = x^3 + 2$	$C_4^0 = 1$	$u^{(4)}(x) = 256e^{4x+3}$
$v'(x) = (x^3 + 2)' = 3x^2$	$C_4^1 = 4$	$u'''(x) = 64e^{4x+3}$
$v''(x) = (3x^2)' = 6x$	$C_4^2 = 6$	$u''(x) = 16e^{4x+3}$
$v'''(x) = (6x)' = 6$	$C_4^3 = 4$	$u'(x) = 4e^{4x+3}$
$v^{(4)}(x) = (6)' = 0$	...	...

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

$$f(x)^{(4)}(x) = 256e^{4x+3}(x^3 + 2) + 768e^{4x+3}x^2 + 576e^{4x+3}x + 96e^{4x+3} =$$
$$= 32e^{4x+3}(8x^3 + 24x^2 + 18x + 19).$$

2) $u = \cos 2x, v(x) = x^2 + 1, n = 100$.

$v^{(0)}(x) = x^2 + 1$	$C_{100}^0 = 1$	$u^{(100)}(x) = 2^{100}\cos 2x$
$v'(x) = 2x$	$C_{100}^1 = 100$	$u^{(99)}(x) = 2^{99}\sin 2x$
$v''(x) = 2$	$C_{100}^2 = 4950$	$u^{(98)}(x) = -2^{98}\cos 2x$
$v'''(x) = 0$	...	...
...	...	...

Заповнюючи таблицю, скористалися формулами:

$$u^{(100)}(x) = 2^{100}\cos\left(2x + 50\pi\right) = 2^{100}\cos 2x;$$
$$u^{(99)}(x) = 2^{99}\cos\left(2x + \frac{99\pi}{2}\right) = 2^{99}\sin 2x;$$
$$u^{(98)}(x) = 2^{98}\cos\left(2x + 49\pi\right) = -2^{98}\cos 2x;$$
$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950.$$

Отже,

$$f^{(100)}(x) = 2^{100}\cos 2x\cdot(x^2+1) + 100\cdot 2^{100}\sin 2x\cdot x - 4950\cdot 2^{99}\cos 2x =$$
$$= 2^{100}\Big((x^2-2474)\cos 2x + 100x\sin 2x\Big).$$

3) Функція означена і нескінченно диференційовна на $(-\infty;1),(1;2),(2;+\infty)$.

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} =$$
$$= \frac{(A+B)x - B - 2A}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -B-2A=-3. \end{cases}$$
$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$
$$f^{(n)}(x) = 2\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = 2\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.\bullet$$

Навчальна задача 11.3. Знайти другу похідну функції $y(x)$, заданої параметрично: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, t\in[0;2\pi). \end{cases}$

❍ $y'(x) : \begin{cases} x = a\cos t, t\in[0;2\pi), \\ y'_x(t) = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

$$y''(x) : \begin{cases} x = a\cos t, t\in[0;2\pi), \\ y''_{x^2}(t) = \dfrac{\frac{b}{a}\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}.\bullet \end{cases}$$

Навчальна задача 11.4. Знайти похідну неявної функції $y(x)$, заданої співвідношенням: $y = x + \operatorname{arctg} y$.

❍ $F(x,y) = y - x - \operatorname{arctg} y = 0.$

$$y' - 1 - \frac{y'}{1+y^2} = 0$$
$$y'\left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) = 1$$
$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} - 1;$$
$$y'' = \left(\frac{1}{y^2} - 1\right)' = -\frac{2y'}{y^3} = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) = \frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5}.\bullet$$

Навчальна Знайти диференціал 2-го порядку функції

задача 11.5. $f(x) = \ln(1+x^2)$.

❍ Маємо:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2};\ f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};\ d^2f = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx^2. \ ●$$

Навчальна задача 11.6. Знайти диференціал d^3y, де $y = u^2, u = u(x)$.

❍ $dy = 2udu$; $d^2y = 2du^2 + 2ud^2u$;

$$d^3u = 4dud^2u + 2dud^2u + 2ud^3u = 6dud^2u + 2ud^3u. ●$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 11.1. Знайдіть зазначену похідну:

1) $f(x) = (x+10)^6, f'''(2)$;
2) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4, f^{\mathrm{IV}}(1)$;
3) $f(x) = e^{2x-1}, f''(0)$;
4) $f(x) = x^3 \ln x, y^{\mathrm{IV}}$;
5) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, y''$;
6) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), y''$;
7) $f(x) = e^{\sqrt{x}}, y''$;
8) $f(x) = xe^x, y^{(n)}$;
9) $f(x) = \ln(ax+b), y^{(n)}$;
10) $f(x) = \log_a x, y^{(n)}$;
11) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}, y^{(n)}$;
12) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}, y^{(n)}$.

❍ 1) 207360; 2) 360; 3) $\dfrac{4}{e}$; 4) $\dfrac{6}{x}$; 5) $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$; 6) $-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 7) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$; 8) $e^x(x+n)$; 9) $\dfrac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$; 10) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$;
11) $(-1)^n \dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$; 12) $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. ●

Задача 11.2. Знайдіть зазначену похідну функції $y = y(x)$, заданої неявно:

1) $y = \operatorname{tg}(x+y), y'''$;
2) $e^{x+y} = xy, y''$;

❍ 1) $\dfrac{-2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$; 2) $-\dfrac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$. ●

Задача 11.3. Знайдіть похідну y''_{xx} функції $y = y(x)$, заданої параметрично:
1) $x = a\cos t, y = a\sin t$;
2) $x = a(\varphi - \sin\varphi), y = a(1-\cos\varphi)$;
3) $x = \ln t, y = t^2 - 1$;
4) $x = \arcsin t, y = \ln(1-t^2)$.

❍ 1) $y''_{xx} : x = a\cos t, y''_{xx}(t) = -\dfrac{1}{a\sin^3 t}$;

2) $y''_{xx} : x = a(\varphi - \sin\varphi), y''_{xx}(\varphi) = -\dfrac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$;

3) $y''_{xx} : x = \ln t, y''_{xx}(t) = 4t^2$;

4) $y''_{xx} : x = \arcsin t, y''_{xx}(t) = -\dfrac{2}{1-t^2}$. ●

Задача 11.4. Застосуйте Лейбніцову формулу до обчислення похідної:
1) $[(x^2+1)\sin x]^{(20)}$;
2) $(e^x \sin x)^{(n)}$;
3) $(x^3 \ln x)^{(n)}$.

❍ 1) $(x^2-379)\sin x - 40x\cos x$; 2) $e^x \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$;

3) $\dfrac{6(-1)^n(n-4)!}{x^{n-3}}, n \geq 4$. ●

Задача 11.5. Знайдіть диференціал d^2y функції:
1) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $y = 4^{-x^2}$;
3) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.

❍ 1) $-\dfrac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$; 2) $4^{-x^2} 2\ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1)dx^2$; 3) $\dfrac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}dx^2$. ●

Задача 11.6. $y = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x = \operatorname{tg} t$; виразіть d^2y через: 1) x та dx;
2) t та dt.

❍ 1) $d^2y = \dfrac{4x}{x^4 - 1} d^2x - \dfrac{4(1 + 3x^4)}{(x^4 - 1)^2} dx^2$; 2) $d^2y = -\dfrac{4}{\cos^2 2t} dt^2$. ●