Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Наведіть необхідні умови локального екстремуму в точці.
2. Сформулюйте теорему Роля і розкрийте її геометричний зміст.
3. Сформулюйте теореми Лаґранжа і Коші. Яка з цих теорем є наслідком іншої?
4. У чому полягає геометричний зміст теореми Лаґранжа?
5. Запишіть формулу скінченних приростів і її наслідок.
6. Чи може функція, відмінна від сталої, мати нульову похідну?
7. Сформулюйте правила Бернуллі — Лопіталя розкриття невизначенностей типу $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$.
8. Чи можна застосувати правила Бернуллі — Лопіталя до розкриття інших невизначеностей і якщо можна, то як?
9. Чи можна застосовувати правила Бернуллі — Лопіталя кілька разів?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 12.1. Перевірити Ролєву теорему для функції $f(x) = x - x^3$ на $[-1;0]$ та $[0;1]$.

❍ $f(x) \in C_{(-\infty;+\infty)}, f(x) \in D_{(-\infty;+\infty)} \Rightarrow$

$$f(x) \in C_{[-1;0]}, C_{[0;1]}, D_{(-1;0)}, D_{(0;1)};$$
$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Отже, на $[-1;0]$ та $[0;1]$ виконано всі умови Ролєвої теореми для функції $f(x)$. Знайдімо значення ξ, про яке йдеться в теоремі:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}};$$
$$\xi_1 \in (-1;0),\ \xi_2 \in (0;1). \bullet$$

Навчальна задача 12.2. Перевірити Лаґранжову теорему для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1;1]$.

❍ $f(x) \in C_{[-1;1]}; f(x) \in D_{(-1;1)}$. Отже, виконано умови Лаґранжової теореми для $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ на $[-1;1]$.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};\ f(1) - f(-1) = 2f'(\xi);$$
$$0 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\xi} \Rightarrow \xi = 0 \in (-1;1). \bullet$$

Навчальна задача 12.3. З'ясувати чи застосовна теорема Коші для функцій $f(x) = \cos x,\ g(x) = x^3$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

❍ Функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і диференційовні в $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Але

$$g'(0)=3x^2\mid_{x=0}=0.$$

Невиконання умови теореми призводить до невиконання твердження:

$$\frac{\sin\xi}{3\xi^2}\neq\frac{\cos(\frac{\pi}{2})-\cos(-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})^3-(-\frac{\pi}{2})^3}=0$$

$$\forall\xi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, теорема Коші не застосовна до функцій $f(x)=\cos x$, $g(x)=x^3$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. ●

Навчальна задача 12.4.

Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}$.

❍ 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=L;$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^{50}-2x+1)'}{(x^{100}-2x+1)'}=\lim_{x\to1}\frac{50x^{49}-2}{100x^{99}-2}=\frac{24}{49}=L.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=L;$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(2x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2-\cos x}-\nexists,$$

тобто правило Бернуллі — Лопіталя не застосовне, але

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}.$$ ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 12.1.

Нехай $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. Доведіть, що всі три корені рівняння $f'(x)=0$ дійсні.

Задача 12.2.

Доведіть, що рівняння $16x^4-64x+31=0$ не може мати двох різних дійсних коренів у інтервалі $(0;1)$.

Задача 12.3. Доведіть, що рівняння $e^{x-1} + x - 2 = 0$, яке має корінь $x = 1$ (перевірте!), не має інших дійсних коренів.

Задача 12.4. Застосовуючи Лаґранжову формулу для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на відрізку $[0;1]$, визначте точку $x = \xi$, що фігурує у формулі.

❍ $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ●

Задача 12.5. Застосовуючи Лаґранжову формулу, доведіть нерівність $e^x > 1 + x, x \neq 0$.

Задача 12.6. Застосовуючи формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$ на відрізку $[0;2]$, визначте точку $x = \xi$, що фігурує у формулі.

❍ $\xi_1 = \dfrac{1}{2}, \xi_2 = \dfrac{5}{3}$. ●

Задача 12.7. Користуючись правилом Бернуллі — Лопіталя, знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} + x - 2}{x^{50} + x - 2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1 - x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$;

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n e^{-x})$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right]$;

11) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln^3 x)$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1)$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty} ((\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x)$;

16) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$;

17) $\lim\limits_{x\to +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;

18) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$;

19) $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\ln x}$; 20) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

❍ 1) $\dfrac{101}{51}$; 2) $\dfrac{\ln 2-\ln 3}{\ln 4-\ln 5}$; 3) 1; 4) $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; 5) $-\dfrac{1}{2}$; 6) 0; 7) $-\dfrac{\pi}{2}$; 8) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; 9) 0; 10) $\dfrac{1}{2}$; 11) $-\dfrac{2}{\pi}$; 12) $+\infty$; 13) 0; 14) 0; 15) 0; 16) 1; 17) 1; 18) 1; 19) $\dfrac{1}{e}$; 20) 1. ●

Задача 12.8.

Перевірте, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ існує, але її не можна обчислити за правилом Бернуллі — Лопіталя.