Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Запишіть Тейлорів многочлен $P_n(x)$ за степенями $(x - x_0)$ функції $f(x)$.

2. Запишіть Тейлорову формулу n-го порядку функції $f(x)$ у точці x_0. Яка достатня умова правильності цієї формули?

3. Що звуть залишковим членом Тейлорової формули? Запишіть залишковий член у формі Лаґранжа та у формі Пеано.

4. Для якої функції залишковий член Тейлорової формули може дорівнювати нулеві.

5. Запишіть формулу Тейлора — Маклорена.

6. Запишіть розвинення елементарних функцій $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ за формулою Тейлора — Маклорена.

7. Запишіть асимптотичні оцінки для функцій $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$.

8. Як застосовують Тейлорову формулу до обчислення границь.

9. Запишіть формулу для обчислення наближених значень функції за допомогою диференціалів вищих порядків.

10. Як оцінити похибку наближення за допомогою Тейлорової формули n-го порядку?

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 13.1.

Функцію $f(x)$ розвинути за степенями $(x-2)$, якщо:

1) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ до члена, що містить $(x-2)^3$.

❍ 1) Скористаємось формулою

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Многочлен має похідні будь-якого порядку:

$$f(2) = 0;$$

$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8; f'(2) = 0;$$

$$f''(x) = 24x^2 - 30x - 6, f''(2) = 30;$$

$$f'''(x) = 48x - 30, f'''(2) = 66;$$

$$f^{(4)}(x) = 48; f^{(k)}(2) = 0, k = 5, 6, \ldots.$$

$$f(x) = 15(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + 2(x-2)^4.$$

2) $f(x) = \dfrac{x}{1-x} = -1 - \dfrac{1}{x-1}, x_0 = 2, n = 3.$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k+o\Big((x-2)^3\Big).$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2};f''(x)=\frac{-2}{(x-1)^3};f'''(x)=\frac{6}{(x-1)^4}.$$

$$f(2)=-2;f'(2)=1;f''(2)=-2;f'''(2)=6.$$

$$f(x)=-2+(x-2)-(x-2)^2+(x-2)^3+o\Big((x-2)^3\Big).\bullet$$

Навчальна задача 13.2. Розвинути за степенями x функцію $f(x)=e^x\ln(x+1)$ до члена, який містить x^3 включно.

❍ $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

$$e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=$$

$$=x+x^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+o(x^3)=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

$$e^x\ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).\bullet$$

Навчальна задача 13.3. Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 10^{-4} за допомогою Тейлорової формули.

❍ $$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}.$$

$$(1+x)^{1/3}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)...\left(\frac{1}{3}-k+1\right)\frac{x^k}{k!}+r_n(x),$$

$$r_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8...(3n-1)}{3^{n+1}\left(1+\xi\right)^{n+2/3}}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1},\xi\in\left(0;\frac{1}{9}\right).$$

$$\left|3r_2(x)\right|=\frac{2\cdot5}{3^2\cdot3!}\left(1+\xi\right)^{-8/3}\left(\frac{1}{9}\right)^3<\frac{5}{3^9}>10^{-4};$$

$$\left|3r_3(x)\right| = \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^3\cdot 4!}(1+\xi)^{-11/3}\left(\frac{1}{9}\right)^4 < \frac{10}{3^{12}} < 10^{-4} \Rightarrow n = 3.$$

$$\sqrt[3]{30} \approx 3\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right) \approx$$

$$\approx 3(1 + 0,03703 - 0,00137 + 0,00008) = 3\cdot 1,03574 = 3,10722.$$

$$\sqrt[3]{30} = 3,1072 \pm 10^{-4}.\bullet$$

Навчальна задача 13.4. Оцінити похибку, яку допускають, обчислюючи значення $\ln 1,5$ за формулою:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

❍ $n = 4.$

$$r_4(x) = \frac{4!x^5}{5!(1+\xi)^4}, 0 < \xi < x.$$

$$0 < r_4(x) \le \max_{0\le\xi\le 0,5}\frac{1}{5}\frac{(0,5)^5}{(1+c)^4} < \frac{(0,5)^5}{5} < 0,01.$$

$$\ln 1,5 \approx 0,5 - \frac{1}{2}(0,5)^2 + \frac{1}{3}(0,5)^3 - \frac{1}{4}(0,5)^4 \approx 0,40.$$

$$\varepsilon = 10^{-2};\ 0,40 < \ln 1,5 < 0,41.\bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 13.1. Розвиньте многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.

❍ $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56.\bullet$

Задача 13.2. Розвиньте многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.

❍ $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8.\bullet$

Задача 13.3. Функцію $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ розвиньте за степенями x, застосовуючи Тейлорову формулу.

❍ $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1.\bullet$

Задача 13.4. Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції $y = \dfrac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

❍ $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \dfrac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}, 0 < \theta < 1.\bullet$

Задача 13.5. Напишіть Тейлорову формулу 3-го порядку для функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$ і побудуйте графіки заданої функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

❍ $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + R_3(x)$. ●

Задача 13.6. Напишіть формулу Тейлора — Маклорена n-го порядку для функції $y = xe^x$ при $x_0 = 0$.

❍ $x + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^3}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{(n-1)!} + R_n(x)$. ●

Задача 13.7. Напишіть Тейлорову формулу n-го порядку для функції $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

❍ $$2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{4n-2}}(x-4)^n + R_n(x).$$ ●

Задача 13.8. Знайдіть перші три члени розвинення функції
$$f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$$
за Тейлоровою формулою при $x_0 = 1$. Обчисліть наближено $f(1{,}03)$.

❍ $1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + \ldots, f(1{,}03) = 0{,}82$. ●

Задача 13.9. Знайдіть перші три члени розвинення функції
$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$$
за Тейлоровою формулою при $x_0 = 2$. Обчисліть наближено $f(2{,}02)$ та $f(1{,}97)$.

❍ $f(x) \approx 321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + \ldots$,
$f(2{,}02) \approx 343{,}4, f(1{,}97) = 289{,}9$. ●

Задача 13.10. Застосовуючи наближену формулу $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, знайдіть $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ й оцініть похибку.

❍ $0{,}78; \delta < 0{,}01$. ●

Задача 13.11. Обчисліть з абсолютною похибкою, меншою $0{,}001$, наближене значення:

1) $\sin 1$; 2) $\sqrt{e}$;

3) $\ln 1{,}05$; 4) $\sqrt[3]{33}$.

❍ 1) $0{,}842$; 2) $1{,}648$; 3) $0{,}049$; 4) $3{,}208$. ●