Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Які функції звуть монотонними?
2. Сформулюйте критерій монотонності.
3. Як зв'язані функції $f(x)$ та $g(x)$, якщо відомо, що $f'(x) = g'(x)$ для будь-якого $x \in (a;b)$?
4. Сформулюйте достатні умови строгої монотонності функції $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$.
5. Наведіть означення точок екстремуму функції. Чи може функція мати декілька локальних екстремумів?
6. Наведіть означення критичних точок 1-го порядку. Сформулюйте необхідну умову існування локального екстремуму функції.
7. Сформулюйте достатні умови існування локального екстремуму.
8. У якому разі $f(x) \in C_{[a;b]}$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізку $[a;b]$.
9. Яку функцію звуть опуклою донизу (догори) в інтервалі $(a;b)$?
10. Наведіть означення точки перегину функції і критичної точки 2-го порядку.
11. Сформулюйте необхідну умову існування точки перегину функції.
12. Сформулюйте достатню умову існування точки перегину функції

2. Навчальні задачі

Навчальна задача 14.1.

Знайти інтервали монотонності функції:

1) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7$;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e}, & x < e, \\ \dfrac{\ln x}{x}, & x \geq e; \end{cases}$

3) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$.

❍ 1) $D(f) = (-\infty;+\infty)$.

$$f'(x) = 12x^2 - 42x + 18 = 12(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3.$$

$$\forall x \in (-\infty;+\infty)\ \exists f'(x).$$

Отже, критичні точки: $x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = 3$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{знак } f' & + & & - & & + \\ \text{поведінка } f & \nearrow & \frac{1}{2} & \searrow & 3 & \nearrow \quad x \end{array}$$

$f\ \nearrow: (-\infty;\dfrac{1}{2}) \cup (3;+\infty); f\ \searrow: (\dfrac{1}{2};3).$

2) $D(f) = (-\infty;+\infty).$

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \le e, \\ \dfrac{1-\ln x}{x^2}, & x > e. \end{cases}$$

$$\forall x\ \exists f'(x) \le 0.$$

$$f = \text{const} : (-\infty;e); f\ \searrow: (e;+\infty).$$

3) $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Оскільки $f(x)$ функція непарна, обмежимось проміжком $(0;+\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}.$$

Знайдемо проміжки, на яких $f'(x) > 0$:

$$\cos\frac{\pi}{x} < 0 :$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \frac{\pi}{x} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k = 0,1,2...$$

$$\frac{2}{3+4k} < x < \frac{2}{1+4k}, k = 0,1,2...;$$

$$f(x)\ \nearrow: x \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3+4k};\frac{2}{1+4k}\right)$$

$$f(x)\ \searrow: \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5+4k};\frac{2}{3+4k}\right).\bullet$$

Навчальна задача 14.2.

Знайти екстремуми функції:

1) $y = x^4 - 8x^2 + 12;$

2) $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x.$

❍ 1) $D(y) = (-\infty;+\infty).$

$$\forall x \in (-\infty;+\infty)\ \exists y' = 4x^3 - 16x.$$

$$y' = 0 : x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Критичні точки $-2, 0, 2$.

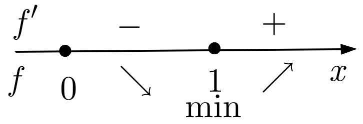
$$\begin{array}{cccccccc} f' & - & & + & & - & & + \\ f & \searrow & -2 & \nearrow & 0 & \searrow & 2 & \nearrow \quad x \\ & & \min & & \max & & \min & \end{array}$$

$$y_{\min}(-2) = y_{\min}(2) = -8, y_{\max}(0) = 12.$$

2) $D(y) = (0;+\infty)$.

$$\forall x \in D(f)\ \exists y' = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}.$$
$$y' = 0 : x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Критична точка $x = 1$.



$y_{\min}(1) = \dfrac{1}{2}$. ●

Навчальна задача 14.3. Знайти найбільше та найменше значення функції
$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2} + 1, x \in [-2;1].$$

❍ Функція $f(x) \in C_{[-2;1]}$. Знайдімо критичні точки функції на $(-2;1)$:

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{x}}.$$
$$f'(x) \neq 0, x \in (-2;1)$$
$$f'(x) = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2}{x}} = \infty \Rightarrow x = 0 \in (-2;1).$$
$$f(-2) = 3;\ f(0) = 1;\ f(1) = \sqrt[3]{2} + 1.$$
$$\max_{[-1,2]} f(x) = f(-2) = 3;$$
$$\min_{[-1,2]} f(x) = f(0) = 1.$$ ●

Навчальна задача 14.4. Довести нерівність $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, x > 0$.

❍ Розгляньмо функцію
$$y(x) = \ln(x + 1) - x.$$

І дослідімо її на локальний екстремум.
$$y' = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0\ \forall x > 0.$$

Функція спадає на $(0;+\infty)$ і отже, своє найбільше значення вона набуває для $x = 0 : y(0) = 0$. Звідси випливає, що $y(x) < 0$ або
$$\ln(x + 1) - x < 0 \quad \forall x > 0.$$

Розгляньмо функцію
$$y(x) = \ln(x + 1) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Дослідімо її на екстремуми.

$$y'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0$$
$$\forall x > 0.$$

Функція зростає на $(0;+\infty)$ і отже, своє найменше значення набуває, коли $x = 0$: $y(0) = 0$. Звідси випливає, що $y(x) > 0$ або

$$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} \quad \forall x > 0. \bullet$$

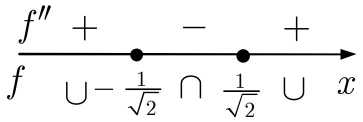
Навчальна задача 14.5. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $f(x) = e^{-x^2} + 2x$.

❍ Ця функція означена, неперервна і диференційовна на $\mathbb{R}$, причому

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + 2,$$
$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Дослідімо знак $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0; x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Отже, функція $f(x)$:
опукла донизу на

$$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right);$$

опукла догори в $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Точки перегину функції $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. ●

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 14.1. Покажіть, що функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає в інтервалі $(-2;1)$.

Задача 14.2. Покажіть, що функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає в інтервалі $(0;1)$ і спадає в інтервалі $(1;2)$. Побудуйте графік цієї функції.

Задача 14.3. Покажіть, що функція:
1) $y = x^3 + x$ скрізь зростає;

2) $y = \operatorname{arctg} x - x$ скрізь спадає.

Задача 14.4. Знайдіть інтервали монотонності та точки екстремумів функції:

1) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$;

2) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$;

3) $y = x - e^x$;

4) $y = x^2 e^{-x}$;

5) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

6) $y = 2x^2 - \ln x$;

7) $y = x - 2\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$;

8) $y = x + \cos x$;

9) $y = x\sqrt{ax - x^2}$ $(a > 0)$.

❍ 1) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{11}{18}; +\infty\right) \uparrow$, $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{11}{18}\right) \downarrow$, $x_{\max} = -\dfrac{1}{2}, x_{\min} = \dfrac{11}{18}$;

2) $\left(-\infty; \dfrac{2a}{3}\right) \cup (a; +\infty) \uparrow$, $\left(\dfrac{2a}{3}; a\right) \downarrow$, $x_{\min} = a, x_{\max} = \dfrac{2a}{3}$;

3) $(-\infty; 0) \uparrow$, $(0; +\infty) \downarrow$, $x_{\max} = 0$;

4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \downarrow$, $(0; 2) \uparrow$, $x_{\max} = 2, x_{\min} = 0$;

5) $(0; 1) \cup (1; e) \downarrow$, $(e; +\infty) \uparrow$, $x_{\min} = e$;

6) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right) \downarrow, \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \uparrow$, $x_{\min} = \dfrac{1}{2}$;

7) $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}; 2\pi\right) \downarrow, \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right) \uparrow$, $x_{\max} = \dfrac{5\pi}{3}$, $x_{\min} = \dfrac{\pi}{3}$;

8) монотонно зростає; 9) $\left(0; \dfrac{3a}{4}\right) \uparrow$, $\left(\dfrac{3a}{4}, a\right) \downarrow, x_{\max} = \dfrac{3a}{4}$. ●

Задача 14.5. Знайдіть найбільші та найменші значення функцій на зазначених відрізках:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 2]$;

2) $y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4]$;

3) $y = \sqrt{100 - x^2}, [-6; 8]$;

4) $y = \sin 2x - x, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

❍ 1) $\max\limits_{[-2;2]} y = 13, \min\limits_{[-2;2]} y = 4$;

2) $\max\limits_{[0;4]} y = 8, \min\limits_{[0;4]} y = 0$;

3) $\max\limits_{[-6;8]} y = 10, \min\limits_{[-6;8]} y = 6;$

4) $\max\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} y = \frac{\pi}{2}, \min\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} y = -\frac{\pi}{2}.$ ●

Задача 14.6. Доведіть правдивість нерівностей:

1) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$;

2) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 14.7. Визначте висоту конуса, вписаного в кулю радіусом R, з найбільшою бічною поверхнею.

❍ $\frac{4R}{3}$. ●

Задача 14.8. Знайдіть висоту прямого колового конуса, описаного навколо кулі радіусом R, найменшого об'єму.

❍ $4R$. ●

Задача 14.9. Покажіть, що графік функції

1) $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь угнутий;

2) $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий.

Задача 14.10. Знайдіть інтервали опуклості графіка функції, та точки перегину:

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

2) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;

3) $y = \ln(1 + x^2)$;

4) $y = 3 - \sqrt[5]{(x-2)^2}$;

5) $y = x^4(12\ln x - 7)$.

❍ 1) $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cap, \left(\frac{5}{3};+\infty\right)\cup$, точка перегину $\left(\frac{5}{3};-\frac{250}{27}\right)$;

2) $(-\infty;2)\cup, (2;4)\cap, (4;+\infty)\cup$, точки перегину $(2;62), (4;206)$;

3) $(-\infty;-1)\cap$, $(-1;1)\cup, (1;+\infty)\cap$, точки перегину $(\pm 1;\ln 2)$;

4) графік угнутий;

5) $(0;1)\cap, (1;+\infty)\cup$, точка перегину $(1;-7)$. ●

Задача 14.11. Знайдіть точки перегину лінії:

1) $x = t^2, y = 3t + t^3$;

2) $x = e^t, y = \sin t$.

❍ 1) $(1;4), (1;-4)$;

2) $t = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ ●