Практична частина

1. Контрольні запитання

1. Які функції звуть парними, непарними, періодичними? Які симетрії мають графіки таких функцій?
2. Що звуть асимптотами графіка функції?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування локального екстремуму функції і достатні умови монотонності функції.
4. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точки перегину функції і достатні умови опуклості функції.

2. Навчальні задачі

Дослідження двічі диференційовної функції $y = f(x)$ на $D(f)$ (за винятком, можливо, скінченої множини точок) і побудову її графіка варто проводити за схемою:

1. Знаходять область означення функції f — множину $D(f)$.

2. Встановлюють можливі симетрії графіка функції.

3. Визначають можливі точки розриву функції і асимптоти її графіка.

4. За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності і точки екстремуму.

5. За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції і точки перегину.

6. Знаходять можливі точки перетину графіка функції з осями координат.

7. Будують графік функції $y = f(x)$ за встановленою інформацією.

Навчальна задача 15.1. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ і побудувати її графік.

❍ Проведімо дослідження цієї функції за схемою

1. Задана функція означена для $x \neq \pm\sqrt{3}$:

$$D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

2. Функція f непарна, оскільки $D(f)$ симетрична та

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1 + (-x)^2} = -\frac{x^3}{1 + x^2} = -f(x).$$

Отже, графік функції симетричний щодо початку координат.

3. Дослідімо поводження функції на межах області означення — в околах точок $x = \pm\sqrt{3}$ та $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \sqrt{3} - 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3} + 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty;$$
$$\lim_{x \to \sqrt{3} + 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{3} - 0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty.$$

Отже, функція неперервна на $D(f)$, $x = \pm\sqrt{3}$ — точки розриву 2-го роду (нескінченного). Прямі $x = -\sqrt{3}$ та $x = \sqrt{3}$ — двобічні вертикальні асимптоти.

Шукатимемо похилі асимптоти (*п. 6.4.3*) $y = kx + b$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{3 - x^2} = 0.$$

Отже, пряма $y = -x$ — двобічна похила асимптота.

4. Знайдімо інтервали монотонності і точки екстремуму (*п. 14.1.1, п. 14.1.2*).

$$y' = \frac{3x^2(3 - x^2) + 2x^4}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2(9 - x^2)}{(3 - x^2)^2}.$$

Функція y' означена в $D(f)$.

$$y' = 0, x \in [0;+\infty) \Rightarrow x = 0, x = 3;$$

$$y' = \infty, x \in [0;+\infty) \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
y' & - & & + & & + & & + & & + & & - & \\
y & \searrow & -3 & \nearrow & -\sqrt{3} & \nearrow & 0 & \nearrow & \sqrt{3} & \nearrow & 3 & \searrow & x \\
 & & \text{min} & & & & & & & & \text{max} & &
\end{array}$$

У точці $x = 3$ функція f досягає максимуму

$$y_{\max} = y(3) = -\frac{9}{2},$$

а в точці $x = -3$ функція досягає мінімуму

$$y_{\min} = y(-3) = \frac{9}{2}.$$

5. Знайдімо інтервали опуклості функції і точки перегину (*п. 14.2.1* та *п. 14.2.2*).

$$y'' = \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^2)^2 - (9x^2 - x^4)2(3 - x^2)(-2x)}{(3 - x^2)^4} = \frac{6x(9 + x^2)}{(3 - x^2)^3}.$$

$$y'' = 0, x \in [0;+\infty) \Rightarrow x = 0;$$

$$y'' = \infty, x \in [0;+\infty) \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
y'' & + & & - & & + & & - & \\
y & \cup & & \cap & 0 & \cup & \sqrt{3} & \cap & x \\
 & & & & \text{т. перегину} & & & &
\end{array}$$

Точка $O(0;0)$ — є точкою перегину функції.

6. Точка перетину з осями — точка O.

7. Зобразімо графік функції (рис. 15.1).

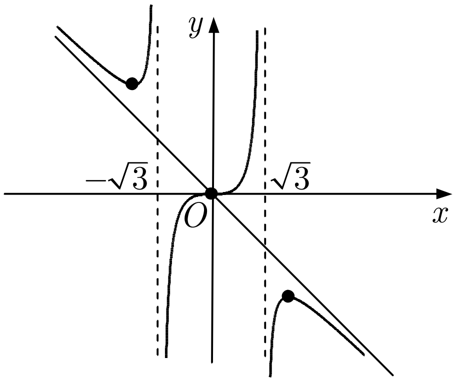


Рис. 15.1

Навчальна задача 15.2.

Дослідити астроїду, задану рівняннями $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ і побудувати її.

❍ Дослідження кривої, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T,$$

де функції φ та ψ двічі диференційовні, провадять за схемою:

1. Встановлюють можливі симетрії кривої.
2. Визначають асимптоти кривої. А, саме, шукають такі значення t:

$$\text{або } x \to \infty, \text{ або } y \to \infty, \text{ або } x \to \infty, y \to \infty.$$

3. За допомогою першої похідної функції визначають інтервали монотонності та точки екстремуму.
4. За допомогою другої похідної функції визначають інтервали опуклості функції та точки перегину.
5. Знаходять можливі точки перетину кривої з осями координат.
6. Будують криву за встановленою інформацією.

Функції $\cos^3 t$ та $\sin^3 t$ означенні для будь-яких значень t. Але оскільки ці функції періодичні з періодом 2π, досить розглянути проміжок $t \in [0;2\pi)$.

Оскільки $x \in [-a;a]$ та $y \in [-a;a]$, то крива асимптот не має.

Знайдімо

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Звідси критичні точки 1-го порядку:

$$y'_x(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \pi;$$

$$y'_x(t) = \infty \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2}, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Знайдімо

$$y''_{x^2}(t) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Знайдімо критичні точки 2-го порядку:

$$y''_{x^2}(t) \neq 0;$$

$$y''_{x^2}(t) = \infty \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi, t_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Побудуймо таблицю значень змінних t, x та y, а також знаків першої та другої похідних.

t	0	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	π	$\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$
x	a		0		$-a$		0	
y'	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y''	∞	$+$	∞	$+$	∞	$-$	∞	$-$
y	0	$\searrow \cup$	$y_{\max} = a$	$\nearrow \cup$	0	$\searrow \cap$	$y_{\min} = -a$	$\nearrow \cap$

На підставі дослідження будуймо астроїду (15.2).

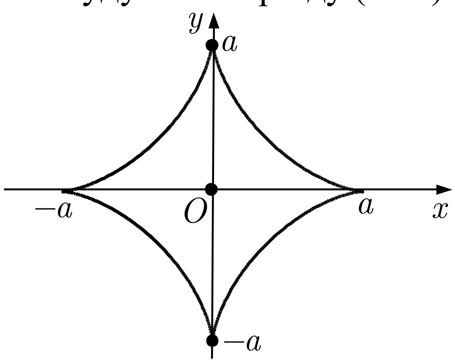


Рис. 15.2

Навчальна задача 15.3.

Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y = (x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}$;

2) $y = \dfrac{e^{x+2}}{x+2}$;

3) $y = x + \operatorname{arctg} x$;

4) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$;

1) $1. D(y) = (-\infty; +\infty)$.

$2. f(-x) = (-x+1)^{2/3} - (-x+2)^{2/3} \neq \pm f(x)$.

$3. y = kx + b:$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x+1)^{2/3} - (x+2)^{2/3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2 - (x+2)^2}{(x+1)^{4/3} + (x+1)^{2/3}(x+2)^{2/3} + (x+2)^{4/3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{3x^{4/3}} = 0;$$

$y = 0$ — горизонтальна асимптота.

$$4.\, y' = \frac{2}{3}\left(\frac{(x+2)^{1/3} - (x+1)^{1/3}}{(x+1)^{1/3}(x+2)^{1/3}}\right);$$

$$y' = 0 \Rightarrow (x+2)^{1/3} = (x+1)^{1/3} \Rightarrow x \in \varnothing;$$

$$y' = \infty \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2;$$

$$\begin{array}{c|ccccc} y' & + & & - & & + \\ \hline y & \nearrow & -2 & \searrow & -1 & \nearrow \\ & & \max & & \min & \end{array} \quad x$$

$$y_{\min}(-1) = -1; y_{\max}(-2) = 1.$$

$$5.\, y'' = -\frac{2}{9}\left(\frac{(x+2)^{4/3} - (x+1)^{4/3}}{(x+1)^{4/3}(x+2)^{4/3}}\right);$$

$$y'' = 0 \Rightarrow (x+2)^{4/3} = (x+1)^{4/3} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x+2 = x+1, \\ x+2 = -x-1 \end{array}\right. \Rightarrow x = -\frac{3}{2};$$

$$y'' = \infty \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2.$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} y'' & + & & + & & - & & - \\ \hline y & \cup & -2 & \cup & -\frac{3}{2} & \cap & -1 & \cap \end{array} \quad x$$

т. перегину

$$y\left(-\tfrac{3}{2}\right) = 0.$$

$$6.\, y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}; x = 0 \Rightarrow y = 1 - \sqrt[3]{4} \approx -0,58.$$

7. Рис. 15.3

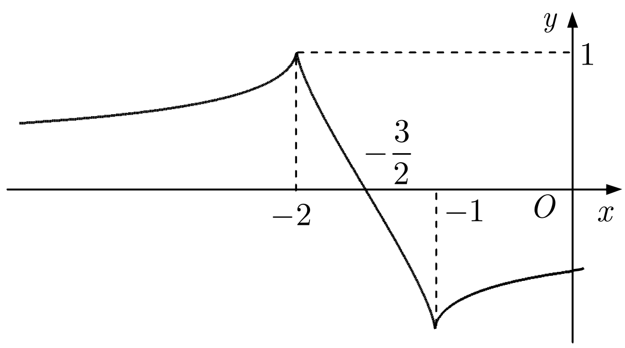


Рис. 15.3

2) $1.\, D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$

$2.\, y(-x) = \dfrac{e^{-x+2}}{-x+2} \neq \pm y(x).$

$3.\, x \to -\infty : y = kx + b :$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+2}}{x+2} = 0;$$

$y = 0$ — ліва горизонтальна асимптота;

$$x \to +\infty : y = kx + b :$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{x(x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+2}}{2} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-2-0} \frac{e^{x+2}}{x+2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-2+0} \frac{e^{x+2}}{x+2} = +\infty.$$

$x = -2$ — вертикальна асимптота.

$4.\, y' = \dfrac{e^{x+2}(x+1)}{(x+2)^2};$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1; y' = \infty \Rightarrow x = -2.$$

$$\begin{array}{cccccccc} y' & - & & - & & + & & \\ \hline y & \searrow & -2 & \searrow & -1 & \nearrow & & x \\ & & & & \text{min} & & & \end{array}$$

$$y(-1) = e \approx 2{,}71.$$

$5.\, y'' = \dfrac{e^{x+2}(x^2+2x+2)}{(x+2)^3};$

$$y'' = 0 \Rightarrow x \in \varnothing; y'' = \infty \Rightarrow x = -2.$$

$$\begin{array}{cccccc} y'' & - & & + & & \\ \hline y & \cap & -2 & \cup & & x \end{array}$$

6. $y \neq 0, x \neq 0.$

7. Рис. 15.4.

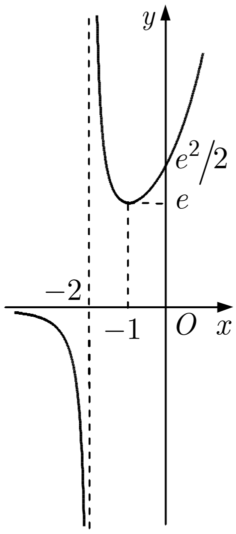


Рис. 15.4

3) $1.D(y)=\mathbb{R}$.

$2.y(-x)=-x-\operatorname{arctg}x=-y(x)$. Отже, функція непарна і її графік симетричний щодо початку координат.

$3.x\to\pm\infty : y=kx+b :$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\operatorname{arctg}x}{x}=1;$$

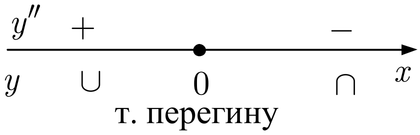
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x=\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$y=x-\dfrac{\pi}{2}$ — ліва асимптота, $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ — права асимптота.

$4.y'=1+\dfrac{1}{1+x^2}>0, x\in\mathbb{R}\Rightarrow y\uparrow$.

$5.y''=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$;

$$y''=0\Rightarrow x=0.$$



$6.y(0)=0$.

7. Рис. 15.5.

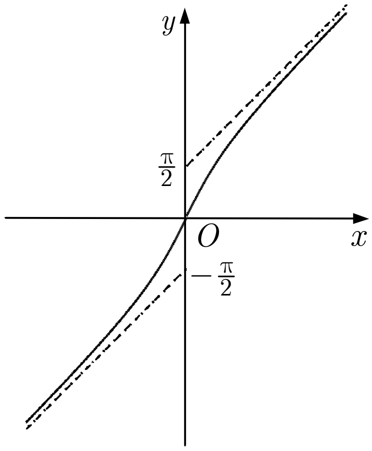


Рис. 15.5

4) $1. D(y) = \mathbb{R}.$

$2. y(-x) = \dfrac{1}{x^2+1} = y(x).$

$3. y = kx + b:$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

$y = 0$ — горизонтальна асимптота.

$4. y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}; y' = 0 \Rightarrow x = 0.$

$$\begin{array}{cccccc} y' & + & & - & \\ \hline y & \nearrow & 0 & \searrow & x \\ & & \max & & \end{array}$$

$5. y'' = 2\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3};$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{array}{cccccccc} y'' & + & & - & & + & \\ \hline y & \cup & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \cap & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cup & x \\ & & \text{т. перегину} & & \text{т. перегину} & & \end{array}$$

$6. y(0) = 1, y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}.$

7. Рис. 15.6.

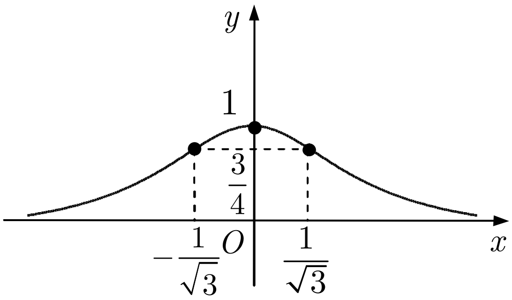


Рис. 15.6

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 15.1. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$;

2) $y = e^{-x^2}$;

3) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

4) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

❍ 1) Рис. 15.7.

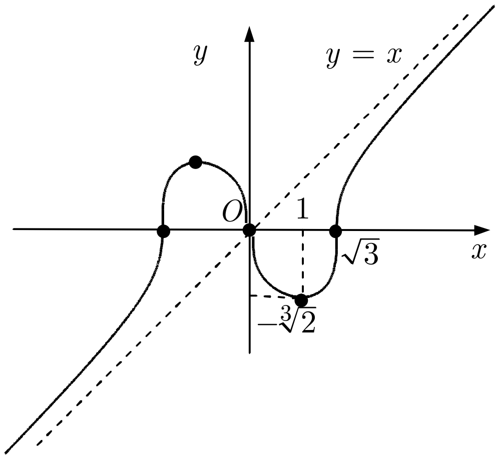


Рис. 15.7

2) Рис. 15.8.

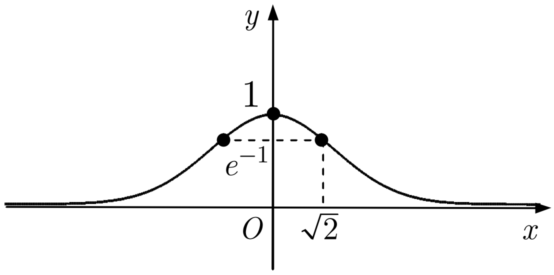


Рис. 15.8

3) Рис. 15.9.

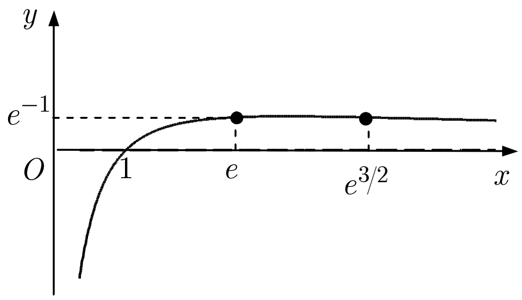


Рис. 15.9

4) Рис. 15.10.

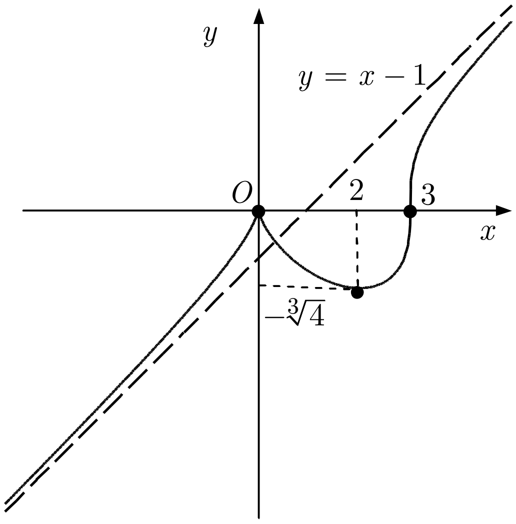


Рис. 15.10

Задача 15.4.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

3) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

4) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$;

5) $y = xe^{-x}$; 6) $y = x^2e^{-x}$;

7) $y = \dfrac{e^{-1/x}}{x}$; 8) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

9) $y = \dfrac{1}{x\ln x}$; 10) $y = x^2\ln x$;

11) $y = x + \sin x$;

12) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

❍1) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{2}, y_{\min} = y(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $\left(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right),(0;0)$ та $\left(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ — точки перегину, $y = 0$ — асимптота;

2) $y_{\min} = y(0) = 1$, $x = \pm 1, y = 0$ — асимптоти;

3) $y_{\max} = y(0) = 2, y_{\min} = y(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$;

4) $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = \sqrt[3]{16}$, $(-\sqrt[3]{4};-\sqrt[3]{2})$ — точка перегину, $y = \sqrt[3]{4}, y = x$ — асимптоти;

5) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{e}, \left(2;\dfrac{2}{e^2}\right)$ — точка перегину, $y = 0$ — асимптота;

6) $y_{\max} = y(2) = \dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min} = y(0) = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{2}$ — абсциси точок перегину, $y = 0$ — асимптота;

7) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{e}, x = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — абсциси точок перегину, $x = 0$ — ліва асимптота, $y = 0$ — асимптота;

8) $y_{\max} = y(e) = \dfrac{1}{e}, \left(e\sqrt{e};\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ — точка перегину, $x = 0, y = 0$ — праві асимптоти;

9) $y_{\max} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e$, $x = 1$ — асимптота, $x = 0$ та $y = 0$ — праві асимптоти;

10) $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}, \left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}};-\dfrac{3}{2e^3}\right)$ — точка перегину;

11) $(k\pi;k\pi), k \in \mathbb{Z}$,— точки перегину;

12) $y_{\max} = y(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1, y_{\min}(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$, $(0;0)$ — точка перегину, $y = x \pm \pi$ — асимптоти.●

Задача 15.5. Побудуйте криву, задану параметрично:
1) $x = t^3 + 3t + 1, y = t^3 - 3t + 1$;
2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

❍1) $(-3;3)$ — максимум, $(5;-1)$ — мінімум, $(1;1)$ — точка перегину; 2) циклоїда.●