Модуль 1. Мова вищої математики

Короткий зміст

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 1.1—1.4) і розширеному (розділи 1.1—1.5).

У модулі:

— розглянуто основні засади математичного моделювання і побудови математичної теорії;

— запроваджено математичну символіку;

— розглянуто множини і дії над ними;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями).

Теоретична частина

1.1. Про математичне моделювання

1.1.1. Математичне моделювання

Моделлю звуть:

1) зразок, що відтворює, імітує будову і дію якого-небудь об'єкта;

2) предмет, відтворений у зменшеному, іноді у збільшеному або натуральному вигляді;

3) уявний чи умовний (зображення, опис, схема і т. ін.) образ якого-небудь об'єкта, процесу або явища, що використовують як його «представник»;

4) систему математичних залежностей або програму, що відображає суттєві властивості об'єкта, процесу чи явища, які вивчають.

Процес будування моделі звуть *моделюванням*.

Розрізняють моделювання (рис. 1.1):

— *матеріальне*, що має експериментальний характер (дослідження провадять на моделі, яка відтворює основні геометричні, фізичні, динамічні та функціональні характеристики досліджуваного об'єкту), яке поділяють на:

— — *фізичне* (реальному об'єкту зіставляють його збільшену або зменшену копію, яка дозволяє перенесення властивостей досліджуваних процесів і явищ з моделі на об'єкт, спираючись на теорії подібності). Приклади фізичних моделей: в астрономії — планетарій, в архітектурі — макети будинків, у літакобудуванні — моделі літальних апаратів;

— — *аналогове* (ґрунтується на аналогії процесів і явищ, що мають різну фізичну природу, але однаково описуваних математичними рівняннями, логічними схемами тощо). Приміром, вивчення механічних коливань за допомогою електричної схеми, яку описують ті самі диференціальні рівняння;

— *ідеальне*, що має теоретичний характер (ґрунтується не на матеріальній аналогії, а на аналогії мислимій), яке поділяють на:

— — *інтуїтивне* (використовує інтуїтивне уявлення про об'єкт дослідження, що не піддається формалізації або її не потребує). Приміром, життєвий досвід людини можна вважати її інтуїтивною моделлю навколишнього світу;

— — *знакове* (використовує як моделі знакові перетворення будь-якого типу: схеми, графіки, креслення, формули, набори символів тощо, а також містить сукупність законів, за якими діють з вибраними знаками).

Найважливішим видом знакового моделювання є *математичне моделювання*, при якому об'єкт досліджують за допомогою моделі, сформульованій математичною мовою, з використанням тих чи інших математичних методів (класичний приклад — опис і дослідження Ньютоном основних законів механіки математичними засобами).

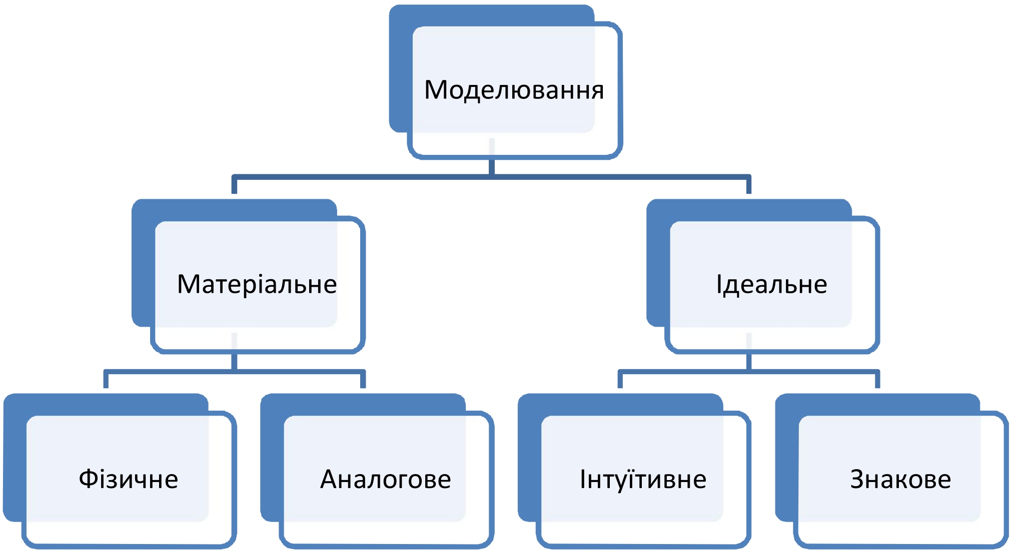

Рис. 1.1

Міркування про математику — мова пізнання світу див. у *п. 1.5.1.*

1.1.2. Для чого потрібне моделювання

Моделі будують для того, щоб:

1) зрозуміти, як влаштований певний об'єкт (процес), його структуру, основні властивості, закони розвитку і взаємодії з навколишнім світом;

2) навчитись керувати об'єктом (або процесом) і визначити найкращі способи керування при заданій меті і критеріях;

3) прогнозувати прямі і побічні наслідки реалізації заданих способів і форм впливу на об'єкт.

Одному об'єкту може зіставлятись не одна, а декілька моделей.

Коментар до цього пункту див. у *п. 1.5.2.*

1.1.3. Як провадять модельні дослідження

Відправною точкою дослідження, яке згодом моделюватимуть, служить деяка задача з тої чи іншої предметної галузі (біології, хімії, географії, геології тощо). Для цієї задачі будують математичну модель за певними принципами.

1. Формують основні питання про поведінку системи, відповіді на які хотіли б дістати з допомогою моделі.

2. Із сукупності законів, що керують системою, враховують лише ті, які істотно можуть вплинути на шукані відповіді.

3. Додатково до цих законів, при потребі, для системи в цілому або окремих її частин формулюють певні гіпотези про функціонування. Як правило, ці гіпотези правдоподібні в тому розумінні, що узгоджуються з теоретичними уявленнями.

4. Гіпотези так само, як і закони виражають певними математичними співвідношеннями, які об'єднують у деякий формальний опис моделі.

Після побудови моделі розробляють або використовують створений раніше алгоритм для аналізу цієї моделі. Якщо модель і алгоритм не дуже складні, то можна провести дослідження аналітично. Інакше пишуть програму, що реалізує цей алгоритм на комп'ютері. Результати комп'ютерних розрахунків обов'язково порівнюють з фактичною інформацією з відповідної предметної галузі. Це порівняння конче потрібно для того, щоб переконатись в адекватності моделі, в тому, що модельним розрахункам можна вірити, їх можна використовувати. Якщо з'ясовують, що результати зовсім не описують реальні явища, то вертаються до побудованої моделі — може вона потребує удосконалення. Можливі також помилки в алгоритмі та (або) в комп'ютерній програмі. Такі повторні перегляди продовжують до тих пір, поки результати розрахунків не задовольнятимуть дослідника.

Доводиться моделювати і в середині самої математики, відшукувати зручніші засоби дослідження, ніж початковий математичний апарат.

Як провадять математичні дослідження див. у *п. 1.5.3.*

1.2. Математична символіка

1.2.1. Логічні символи

Для скорочення математичних записів інколи використовують логічну символіку.

Квантор існування $\exists$ відповідає словам «існує», «знайдеться». Запис $\exists x : A(x)$ читають «існує x такий, що виконано $A(x)$».

Запис $\exists!$ читають «існує єдиний».

Квантор загальності $\forall$ відповідає словам «для будь-якого», «для всіх». Запис $\forall x : A(x)$ читають «для будь-якого x виконано $A(x)$».

Запис $A \Rightarrow B$ означає «з A випливає B», «якщо A, то B», де $\Rightarrow$ — символ *імплікації*.

Запис $A \Leftrightarrow B$ читають «A тоді й лише тоді, коли B». Символ *еквіваленції* $\Leftrightarrow$ означає рівносильність тверджень.

Запис $A \vee B$ читають «A або B», де $\vee$ — символ *диз'юнкції*.

Запис $A \wedge B$ читають «A і B», де $\wedge$ — символ *кон'юнкції*.

Запис $\overline{A}$ читають «не A», де риска над твердженням — символ *заперечення*.

Крім того, користуватимемося знаками $\overset{\text{def}}{=}$ — «рівність за означенням» і $\overset{\text{den}}{=}$ — «позначення».

Якщо в символьний запис твердження P входять квантори $\exists, \forall$ і умова A, то будуючи символьний запис протилежного твердження $\overline{P}$, квантор $\exists$ замінюють на $\forall$, квантор $\forall$ — на $\exists$, а умову A — на $\overline{A}$. Отже,

$$\overline{\exists x : A(x)} \Leftrightarrow \forall x : \overline{A}(x);$$
$$\overline{\forall x : A(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{A}(x);$$
$$\overline{\forall x > a : A(x)} \Leftrightarrow \exists x > a : \overline{A}(x).$$

Приклад. Нехай твердження

$P =$«всі елементи x числової множини X справджують умову $x < M$».

Його запереченням є твердження

$\overline{P} =$«не всі елементи x числової множини X справджують умову $x < M$»,

тобто знайдеться (існує) такий елемент $x \in X$, для якого нерівність $x < M$ не виконана, тобто виконано протилежну нерівність $x \geq M$.

Тоді,

$$P = \forall x \in X : x < M;$$
$$\overline{P} = \exists x \in X : x \geq M.$$

Про висловлювання і логічні дії над висловлюваннями див. *п. 1.5.4, 1.5.5.*

1.2.2. Скорочені позначення

1. Індекс j **перебігає** натуральні значення від 1 до n:

$$j = 1, 2, \ldots, n \overset{\text{den}}{\Leftrightarrow} j = \overline{1, n}.$$

2. Сума n доданків, що мають один і той самий вигляд і відрізняються лише індексами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \overset{\text{den}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

де Σ — символ підсумовування, k — індекс підсумовування.

Властивості символу підсумовування:

1) позначення індексу можна поміняти, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{s=1}^{n} P_s;$$

2) множник, що не залежить від індексу підсумовування, можна винести за знак суми, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha P_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} P_k;$$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (P_k + Q_k) = \sum_{k=1}^{n} P_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k.$

3. Факторіал. Добуток перших n натуральних чисел звуть *факторіалом* і позначають

$$n! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Приміром, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Зауважмо, що

$$(n+1)! = n!(n+1);\ (n+2)! = n!(n+1)(n+2).$$

Вважають, що

$$0! \overset{\text{def}}{=} 1.$$

1.3. Як будують математичні теорії

1.3.1. Складові математичної теорії

Щоб побудувати математичну теорію потрібно:
1) визначити перелік *первісних понять* — «найпростіших» понять, які не означують, а лише описують;
2) описати властивості основних понять за допомогою *аксіом* — висловлювань, які вважають правдивими і які не вимагають доведень;
3) сформулювати низку *означень* — висловлювань, які описують або новий символ, або вужчий порівняно з наявним клас об'єктів;
4) сформулювати і довести *твердження*, які ще звуть *теоремами*, про властивості означених об'єктів.

1.3.2. Теореми

Будь-яке математичне твердження (зокрема і теорему) можна сформулювати так: «якщо P, то Q», або «з P випливає Q», $P \Rightarrow Q$, де P — умови теореми, Q — висновок.

Виділяють чотири типи теорем:
$P \Rightarrow Q$ — пряма;
$Q \Rightarrow P$ — обернена;
$\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ — протилежна;
$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ — протилежна оберненій.

Якщо пряма теорема правдива, то обернена може бути як правдивою, так і неправдивою.

Приклади.

1. Пряма теорема (Піфагорова теорема): якщо трикутник прямокутний, то квадрат більшої сторони дорівнює сумі квадратів двох менших сторін трикутника.
Обернена теорема: якщо квадрат більшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох менших сторін, то такий трикутник прямокутний.
У цьому разі правдиві як пряма, так і обернена теореми.
2. Пряма теорема: якщо кути вертикальні, то вони

рівні.
Обернена теорема: якщо кути рівні, то вони вертикальні.
Тут пряма теорема правдива, а обернена — неправдива.

Теореми пряма і протилежна оберненій, а також обернена і протилежна — еквівалентні, тобто

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P});$$
$$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}).$$

На цій властивості ґрунтується метод *доведення від супротивного*. Для доведення цим методом теореми $P \Rightarrow Q$ припускають, що справджується умова $\bar{Q}$. Якщо міркування приводять до того, що за такого припущення умову P не виконано, тобто виникає суперечність, то теорему вважають доведеною.

1.3.3. Необхідність та достатність

Нехай твердження $P \Rightarrow Q$ правдиве. Тоді кажуть, що P — *достатня умова* для Q, а Q — *необхідна умова* для P.

Приміром, P — висловлювання «число x дорівнює нулеві»; Q — висловлювання «добуток xy дорівнює нулеві».

Тоді P — достатня умова для Q. Справді, для того, щоб добуток дорівнював нулеві, досить, щоб $x = 0$. Для того, щоб $x = 0$, треба, щоб добуток $xy = 0$, тобто Q — необхідна умова для P.

Однак, Q — не є достатньою для P: з того що добуток $xy = 0$, не випливає, що $x = 0$.

Якщо правдиві пряма теорема $P \Rightarrow Q$ і обернена $Q \Rightarrow P$, то умови P та Q — еквівалентні: $P \Leftrightarrow Q$, умова P необхідна та достатня для умови Q і умова Q — необхідна та достатня для P.

Твердження такої теореми зазвичай звучить так: «P тоді й лише тоді, коли Q». Ці теореми ще звуть *критеріями*.

Приклади.

1. «Якщо $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — чотирикутник з перпендикулярними діагоналями». Умова перпендикулярності діагоналей є лише необхідною умовою для того, щоб чотирикутник був квадратом, але не є достатньою.
2. «Якщо в чотирикутнику сторони рівні між собою, то цей чотирикутник — паралелограм». Умова рівності сторін є достатньою умовою того, що чотирикутник — паралелограм, але не є необхідною, адже не кожен паралелограм є ромбом (чотирикутником з рівними сторонами).
3. «Чотирикутник є паралелограмом тоді й лише тоді, якщо в нього протилежні сторони паралельні і рівні».

Ця умова є необхідною і достатньою для того, щоб чотирикутник був паралелограмом.

1.3.4. Метод математичної індукції

Часто в математичних твердженнях йдеться про нескінченну множину об'єктів і перебрати всі ці об'єкти просто неможливо. Існує метод міркувань, що заступає нездійсненний перебір такої нескінченної множини випадків — *метод математичної індукції*, підґрунтям якого є принцип математичної індукції.

Схема методу математичної індукції.

Розгляньмо, твердження $P(n)$.

Крок 1. Перевіряють істинність твердження $P(1)$.

Крок 2. Припускаючи істинність твердження $P(k)$, доводять істинність твердження $P(k+1)$.

Якщо доведення правдиве для кожного натурального значення k, то, відповідно до принципу математичної індукції, твердження $P(n)$ є істинним для будь-яких натуральних значень n.

Приклад.

Доведімо *нерівність Бернуллі* (Якоба Бернуллі)

$$(1+a)^n \geq 1+na \ \forall a > -1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

методом математичної індукції.

►Знак рівності в нерівності $(1+a)^n \geq 1+na$ може досягатися лише для $n=1$ та $a=0$:

$$1+a = 1+a \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1+1\cdot a; \ \ 1^n = 1.$$

Крок 1. Для $n=1$ твердження виконано

$$1+a \geq 1+a.$$

Крок 2. Припускаємо, що воно виконано для $n=k$

$$(1+a)^k \geq 1+ka.$$

Тоді

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) =$$
$$= 1+a(k+1)+a^2k > 1+a(k+1).$$

Отже, твердження виконується і для $n=k+1$. За принципом математичної індукції це означає, що твердження правдиве для всіх натуральних значень n. ◄

Вправа 1.1.

Довести *нерівність Коші*: для будь-якого набору невід'ємних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ правдива нерівність

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

причому знак рівності може бути тоді й лише тоді, коли $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Розв'язання вправи 1.1 див. у *п. 1.5.6.*

1.4. Множини і дії над ними

1.4.1. Поняття множини

Поняття множини є одним з первісних понять. Його не означують, а пояснюють прикладами.

Під *множиною* розуміють сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за якою-небудь ознакою. Об'єкти, які творять множину звуть її *елементами* множини.

Множини зазвичай позначають великими літерами латинки $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а їхні елементи — малими літерами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$.

Приклади.

1. Множина студентів у аудиторії (елементи — студенти).
2. Множина днів тижня (елементи — понеділок, вівторок,..., неділя).
3. Множина дільників числа 6 (елементи — числа $1, 2, 3, 6$).

Те, що елемент x належить множині A ($\Leftrightarrow$ x є елементом множині A) коротко записують як

$$x \in A.$$

Те, що елемент x не належить множині A ($\Leftrightarrow$ x не є елементом множині A) коротко записують як

$$x \notin A.$$

Приміром, якщо A — множина дільників числа 6, то $2 \in A, 5 \notin A$.

Множини задають:

1) переліком усіх елементів. Так запис

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

означає множину, що містить лише елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2) *характеристичною властивістю*, яку мають її елементи, приміром,

$$A = \{x \mid x \text{ має властивість } P\}.$$

Приклад.

Нехай множина A — множина дійсних розв'язків квадратного рівняння $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Тоді,

$$A = \{-3, -1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 3 = 0\},$$

де $\mathbb{R}$ означає множину всіх дійсних чисел.

Множину, що не містить жодного елементу, звуть *порожньою множиною* і позначають $\varnothing$. Її можна задати, приміром, як

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

1.4.2. Рівність множин. Підмножини

Означення 1.1. Множини A та B звуть *рівними*, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, і, навпаки, кожен елемент множини B є елементом множини A і позначають

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B, \\ x \in B \Rightarrow x \in A. \end{cases}$$

З означення рівності множин випливає, що у множині однакові елементи не розрізняють, як не є важливим і порядок запису елементів множини.

Означення 1.2. Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то множину A звуть *підмножиною* множини B (ще кажуть A міститься в B) і пишуть

$$A \subset B.$$

Приклади. 1. Якщо A — множина всіх ромбів, B — множина всіх паралелограмів, то $A \subset B$.
2. Множина $A = \{0, 3\}$ має 4 підмножини:

$$\varnothing, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}.$$

Властивості включення.
1) $A \subset A$ (також вважають, що $\varnothing \subset A$);
2) якщо $A \subset B, B \subset C$, то $A \subset C$ (*транзитивність*);
3) $A = B$ тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$.

Доведення властивостей включення див. у *п. 1.5.7.*

Отже, для обґрунтування рівності $A = B$ досить установити, що множина A є підмножиною множини B, а B — підмножиною множини A.

Зауваження 1.1. **1.** Множина з n елементів має 2^n підмножин.
2. Треба розрізняти два поняття: елемент множини й одноелементну підмножину. Приміром, якщо $A = \{a, b\}$, то твердження $a \in A$ та $\{a\} \subset A$ правильні, а твердження $a \subset A$ та $\{a\} \in A$ неправильні.

Множину, різні підмножини якої доводиться розглядати, вивчаючи певне питання, звуть *універсальною множиною* і позначають U.

Універсальна множина не може бути «як завгодно широкою» (приміром, «множиною всіх множин»), оскільки розгляд такої множини породжує парадокси — логічні суперечності (див. *п. 1.5.8*).

1.4.3. Дії над множинами

Нехай множини A та B є підмножинами універсальної множини U.

Означення 1.3. *Об'єднанням* (⇔*сумою*) множин A та B звуть множину тих і лише тих елементів, які належать принаймні одній з цих множин і позначають

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Об'єднанням множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ звуть множину тих і лише тих елементів, які належать принаймні одній із множин $A_i, i = \overline{1, n}$, і позначають $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Означення 1.4. *Перерізом* (⇔*добутком*) множин A та B звуть множину тих і лише тих елементів, які належать одночасно і множині A, і множині B і позначають

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Перерізом множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ звуть множину тих і лише тих елементів, які належать одночасно всім множинам $A_i, i = \overline{1, n}$, і позначають $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Означення 1.5. *Різницею* множин A та B звуть множину всіх елементів множини A, які не належать множині B і позначають

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Різницю $U \setminus A$ звуть *доповненням множини* A і позначають

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Приклад. Якщо $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$, то

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{2, 3\},$$
$$A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \{4, 5\}.$$

Дії над множинами і відношення між множинами ілюструють *діаграмами Ейлера — Вена*. Універсальну множину зображують множиною точок деякого прямокутника, а її підмножини — точками кругів (рис. 1.2).

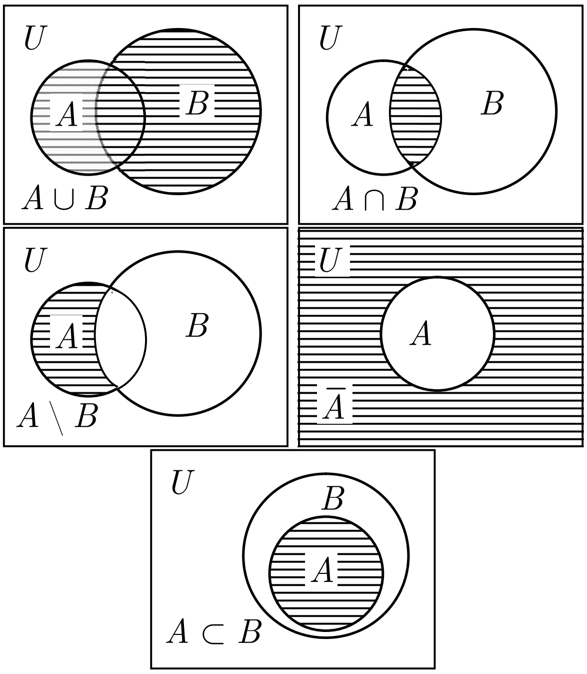

Рис. 1.2

1.4.4. Властивості дій над множинами

Для будь-яких множин A, B, C, що є підмножинами універсальної множини U правдиві властивості:

1) $\overline{\overline{A}} = A$ (*закон подвійного поглинання*);
2) $A \cup B = B \cup A$ (*комутативність об'єднання*);
3) $A \cap B = B \cap A$ (*комутативність перерізу*);
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*асоціативність об'єднання*);
5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*асоціативність перерізу*);
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивність об'єднання щодо перерізу*);
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивність перерізу щодо об'єднання*);

8—9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*закони де Моргана*);

10—11) $A \cup A = A, A \cap A = A$ (*закони ідемпотентності*);

12—13) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$ (*закони* $\varnothing$);

14—15) $A \cup U = U, A \cap U = A$ (*закони* U);

16—17) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ (*закони поглинання*);

18) $A \cup \overline{A} = U$;

19) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Вправа 1.2. Довести, що $\forall A, B, C : A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Розв'язання вправи 1.2 див. у *п. 1.5.9.*

1.5. Додаткові відомості

1.5.1. Математика — мова пізнання світу

Сучасний етап розвитку природничих наук характеризують широким проникненням у ці науки ідей і методів математики. Математика із плином часу з науки втаємничених перетворилася на звичайний інструмент дослідження, потребу в якому відчуває дедалі більше фахівців у різних галузях знання. Особливої ефективності цей інструмент набув з появою комп'ютерів.

Математика була, є і буде елементом загальної культури. Вся історія розвитку цивілізації просякнута ідеями числа і вимірювання. Мірою того як накопичення фактів про навколишню для людей природу перейшло до організованого знання точність ставала дедалі потрібнішою. Повстала потреба в методах, які б забезпечили цю точність у формулюваннях уявлень про довколишній світ.

Архімед заліз до ванни — і досягненням людства стало знання про виштовхувальну силу. Ньютону впало на голову яблуко — і був відкритий закон усесвітнього тяжіння. Перелік цих цікавих історій можна продовжити. Але вони не здатні пролити світло на болісний, а інколи і трагічний пошук істини, у якому осяяння, щаслива мить удачі подаровані не кожному. Людство зберігає зазвичай імена тих, хто тріумфально завершив пошук попередників, часом не фіксуючи в історичній пам'яті етапи досягнення мети. Забутими лишаються імена відважних, які не дожили до перемоги. Їхній досвід — досвід злетів і помилок — міг би навчити нас багато чому.

За кілька тисячоліть існування і вдосконалення математика випрацювала, виплекала особливу мову абстракцій, яка дозволяє одноманітно описати найрозмаїтіші за природою об'єкти і процеси. Тому вважають, що будь-яка наука здобуває ранг «точної» лише тоді, коли вона належною мірою використовує цю систему універсальних методів аналізу, розробляючи добре розвинену систему строгих понять, що дозволяють також узагальнювати і передбачувати.

Прикладами визначної ролі математичних методів дослідження є відкриття планети Нептун, електромагнітних хвиль або позитрону, які були зроблено спершу математично, на папері, і лише потім знайдено їх експериментальне підтвердження.

Математика є точна абстрактна наука, що вивчає якісні співвідношення і просторові форми.

Точність математики означає, що основний метод у математичних дослідженнях становлять логічні міркування, а результати досліджень формулюють у строгій логічній формі. Абстрактність же математики означає, що об'єктами її вивчення служать математичні моделі. В цих моделях математика вивчає співвідношення між їхніми елементами, кількісні та якісні зв'язки між ними, їхню форму. Одна й та сама математична модель може описувати з певним наближенням властивості дуже віддалених одне від одного реальних явищ.

1.5.2. Навіщо потрібні моделі?

Архітектор зібрався збудувати споруду невідомої досі конструкції. Але перш ніж будувати її, він зводить споруду з кубиків на столі, щоб подивитись, як це має виглядати. Це модель. Перед тим як почати збирати серійно новий літак, його досліджують в аеродинамічній трубі і з допомогою датчиків визначають напруження, які виникають у різних місцях конструкцій. Це модель.

Звісно, архітектор міг би збудувати будинок без експериментів з кубиками. Але… він не певний, що споруда виглядатиме, скажімо, естетично. Якщо вона виявиться незугарною, то ще багато років слугуватиме німим докором своєму будівничому.

Звісно, можна почати серійно збирати літаки і не знаючи, які напруження виникають, ну, десь, у крилах. Але… ж ці напруження, якщо вони виявляться завеликими, можуть призвести до руйнування літака.

У поданих прикладах деякий об'єкт зіставляється з іншим, що його заміняє: реальний будинок — модель з кубиків; серійний літак — одиничний літак в аеродинамічній трубі. При цьому припускають, що якісь властивості майже зберігаються під час такої заміни, принаймні достатньо, щоб робити висновки про оригінал.

Так споруда з кубиків набагато менша справжньої, але дозволяє висловити думку про вигляд справжньої споруди.

Літак в аеродинамічній трубі хоч і не летить, але напруження, що виникають у його корпусі, відповідають умовам польоту.

Добре збудована модель, як правило, доступніша для дослідження, ніж реальний об'єкт. Причому деякі об'єкти взагалі не можна вивчити безпосередньо: так неприпустимі експерименти з економікою країни з пізнавальною метою; принципово нездійснені експерименти з минулим або, скажімо, із планетами Сонячної системи. Інше, не менш важливе, призначення моделі полягає в тому, що вона зберігає не всі, а лише найсуттєвіші чинники, що формують ті чи інші властивості об'єкту. Модель дозволяє також навчитись правильно керувати об'єктом, апробуючи різні варіанти керування на моделі об'єкту. Експериментувати ж реальним об'єктом може бути й незручно, а то й шкідливо чи взагалі неможливо через низку причин (значна тривалість досліду, ризик привести об'єкт у небажаний і незворотній стан тощо).

Одному об'єкту можна зіставити не одну, а багато моделей. Природно виникає питання — а яка з них найкраща? Якість моделі визначається її роллю в дослідженні: дозволить вивчення моделі відповісти на питання, що постають перед дослідником — хороша, вдала модель. Така модель, як правило, має чудову властивість — розкривати нові знання про об'єкт-оригінал.

1.5.3. Як провадять математичні дослідження

Для правильної постановки задачі, для оцінювання її даних, для виокремлення істотних з них і для вибору способу розв'язання задачі треба мати і математичну інтуїцію, фантазію і почуття гармонії, що дозволяють передбачити потрібний результат перед тим, як його дістати. Однак інтуїтивно відчути очікуваний результат і накреслити шлях досліджень з допомогою вірогідних міркувань — це ще не все. Інтуїтивне відчуття гармонії є в математиці лише першою, хоч і дуже важливою сходинкою; інтуїтивні міркування віддають на суд холодного розуму для вивчення, доведення або спростування. Для запису досліджень або одержаних результатів використовують мову цифр, математичних символів та логічних описів.

У математиці правильний вибір апарату і методу — запорука успіху і, крім того, часто причина того, що врешті-решт буде одержано більше корисної інформації про предмет, який вивчають, ніж передбачалось. Математичний апарат заховує в собі багато потаємної інформації і потаємного багатства, що накопичувалось у ньому протягом віків, завдяки чому формули можуть виявитись «розумнішими» за дослідника і дати більше, ніж від них очікували.

У математиці правдивість розглядуваного факту доводиться не перевірянням його на низці прикладів, не експериментуванням, що не має для математики доказової сили, а лише логічним шляхом, за законами математичної логіки.

Звісно, і експерименти, і приклади відіграють значну роль у математичних дослідженнях: вони можуть або проілюструвати твердження, або спростувати його, або наштовхнути на нову ідею.

Знання, математичний апарат, інтуїцію, почуття гармонії, фантазії, логіки, експеримент використовують не послідовно по етапах — все це весь час взаємодіє між собою. Не завжди вдається остаточно завершити розпочаті дослідження, але це не означає, що для математики важать лише логічно завершенні дослідження. Можна навести чимало прикладів математичних теорій і положень, які було сформульовано як гіпотези, і які істотно впливали і впливають на розвиток математики і її застосувань.

Остаточні ж результати, одержані в математиці, описуючи ті чи інші властивості логічних абстрактних моделей, мають у певному розумінні абсолютний і вічний характер.

1.5.4. Висловлювання

Під висловлюванням розуміють твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне. Висловлювання позначають зазвичай маленькими літерами латинки p, q, r тощо. Приміром, висловлювання $p =$«Київ — столиця України» — істинне, а $q =$«$6 < 2$» — хибне. Твердження «студент технічного університету» не є висловлюванням, оскільки про нього не можна сказати істинне воно чи хибне.

Істинність і хибність висловлювань позначають відповідно символами 1 та 0, тобто, якщо a — істинне висловлювання, пишуть $a = 1$.

1.5.5. Дії над висловлюваннями

Над висловлюваннями p та q розглядають такі дії:

— *заперечення* $\overline{p}$ (читають «не p»);

— *диз'юнкцію* $p \vee q$ (читають «p диз'юнкція q» або «p або q» і розуміють під цим «або p, або q, або p і q»);

— *кон'юнкцію* $p \wedge q$ (читають «p кон'юнкція q» або «p і q»);

— *імплікацію* $p \Rightarrow q$ (читають «з p випливає q»), висловлювання p називають умовою, а q — висновком;

— *еквіваленцію* $p \Leftrightarrow q$ (читають «p рівносильне q»).

Дії над висловлюваннями задають таблицею істинності (рис. 1.3).

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Рис. 1.3

Логічні дії мають такі самі властивості як і дії над множинами — треба лише замінити: об'єднання множин — диз'юнкцією, переріз множин — кон'юнкцією, доповнення множини — запереченням висловлювання; універсальну множину — на істинне висловлювання, а порожню — на хибне див. *п. 1.4.1.*

Приміром, задано два висловлювання: p — «сяє сонце» та q — «на небі хмарно». З'ясуймо в чому полягають висловлювання та які з них істинні: 1) $p \vee q$; 2) $p \wedge q$; 3) $p \Rightarrow q$; 4) $\overline{p} \Rightarrow q$; 5) $p \Leftrightarrow \overline{q}$.

1) Висловлювання $p \vee q =$«сяє сонце або на небі хмарно» — істинне.

2) Висловлювання $p \wedge q =$«сяє сонце і на небі хмарно» — хибне.

3) Висловлювання $p \Rightarrow q =$«з того, що сяє сонце, випливає, що на небі хмарно» — хибне.

4) Висловлювання $\overline{p} \Rightarrow q =$«з того, що не сяє сонце, випливає, що на небі хмарно» — істинне.

5) Висловлювання $p \Leftrightarrow \overline{q} =$«сонце сяє тоді й лише тоді, коли на небі не хмарно» — істинне.

1.5.6. Розв'язання вправи 1.1

Позначмо

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},\ G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Зазначмо, що нерівність Коші виконано зі знаком рівності, якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, оскільки тоді $A_n = G_n = a_1$, і що виконано строгу нерівність, якщо хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дорівнює нулеві і вони не всі однакові.

При $n = 1$ твердження виконано.

Нехай числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ додатні й $n > 1$, тоді

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1.$$

За допомогою нерівності Бернуллі дістаємо

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n > 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A_n)^n \geq a_n (A_{n-1})^{n-1}.$$

Звідси

$$(A_n)^n \geq a_n (A_{n-1})^{n-1} \geq a_n a_{n-1} (A_{n-2})^{n-2} \geq ... \geq a_n a_{n-1} ... a_2 (A_1)^1 = (G_n)^n \Rightarrow$$
$$A_n \geq G_n.$$

Оскільки $n > 1$, то знак рівності в нерівності Бернуллі може бути тоді й лише тоді, коли $\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = 0$, тобто коли $A_n = A_{n-1}$, звідки випливає, що

$$a_n = A_n = A_{n-1}.$$

Тому знак рівності в нерівності $(A_n)^n \geq (G_n)^n$ може бути тоді й лише тоді, коли

$$a_n = A_{n-1}, a_{n-1} = A_{n-1} = A_{n-2}, ..., a_2 = A_2 = A_1 = a_1.$$

1.5.7. Доведення властивостей включення

Щоб обґрунтувати включення $A \subset B$, досить встановити:

1) якщо $a \in A$, то $a \in B$, або (згідно доведенню від супротивного)
2) якщо $a \notin B$, то $a \notin A$.

1. Справді, з того, що $a \in A$ випливає, що $a \in A$, тобто $A \subset A$.
Якщо $a \notin A$, то $a \notin \varnothing$, тобто $\varnothing \subset A$.
2. Якщо $a \in A$ і $A \subset B$, то $a \in B$. Оскільки $a \in B$ і $B \subset C$, то $a \in C$. Отже, кожний елемент множини A є елементом множини C, тобто $A \subset C$.
3. Випливає з означень рівності і підмножини.

1.5.8. Раселів парадокс «голяра»

Сільський голяр голить лише тих чоловіків села, хто не голиться сам. Яку ж множину людей голить голяр?

Ця множина не визначена, оскільки припущення, що голяр належить цій множині (тобто голить себе) суперечливе; так само суперечливе припущення, що голяр не належить цій множині (тобто не голить себе).

З цього випливає, що опис сукупності тих людей, яких голить голяр незадовільний і не означує множини.

Цей приклад жартівливий, але в математиці відомі приклади парадоксів, зв'язаних з цілком серйозними питаннями.

1.5.9. Розв'язання вправи 1.2

Позначмо

$$T = A \cup (B \cup C), S = (A \cup B) \cup C.$$

Нехай $x \in T$. Тоді $x \in A$ або $x \in B \cup C$. Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$ і, отже, $x \in S$. Так само, якщо $x \in B \cup C$, то $x \in B$ або $x \in C$. Якщо $x \in B$, то $x \in A \cup B$ і, отже, $x \in S$. Аналогічно, якщо $x \in C$, то $x \in S$. Отже, з того, що $x \in T$ випливає, що $x \in S$. А це означає, що $T \subset S$.

Міркуючи так само, встановлюємо, що, якщо $x \in S$, то $x \in T$, тобто $S \subset T$. А це й означає, що $T = S$.

Отже,

$$\forall A, B, C : A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$