Модуль 2. Числові множини

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 2.1—2.4) і розширеному (розділи 2.1—2.5).

У модулі:

— подано властивості дій над дійсними числами; зображення дійсних чисел точками прямої та кола;

— розглянуто обмежені множини, поняття точної верхньої та точної нижньої меж множини;

— подано біноміальну формулу Ньютона;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

2.1. Множина дійсних чисел

2.1.1. Приклади числових множин

Множини, елементами яких є числа, звуть *числовими множинами*.

Числа $1, 2, 3, \ldots$ звуть *натуральними*. Множину натуральних чисел позначають $\mathbb{N}$.

Числа $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ звуть *цілими*. Множину цілих чисел позначають $\mathbb{Z}$.

Числа вигляду $\dfrac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, звуть *раціональними*, а їхню множину позначають

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Будь-яке раціональне число можна записати як скінченний або нескінченний періодичний десятковий дріб.

Поняття *дійсного числа* можна запровадити різними способами, зокрема, як скінченний або нескінченний десятковий дріб.

Множину дійсних чисел позначають

$$\mathbb{R} = \{x \mid x = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\},$$

де a — ціле число, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$— десяткові цифри.

Дійсні числа, що не є раціональними, звуть *ірраціональними*. Множину ірраціональних чисел позначають $\mathbb{I}$. Ірраціональне число записують ще як нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Так, $\dfrac{2}{1} = 2; \dfrac{2}{5} = 0,4; \dfrac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,(3)$ — раціональні числа; $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$; $\pi = 3,1415\ldots$ — ірраціональні числа.

Доведення того, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом див. у *п. 2.5.1.*

Правдиві включення (рис. 2.1):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}; \ \mathbb{I} \subset \mathbb{R}; \ \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

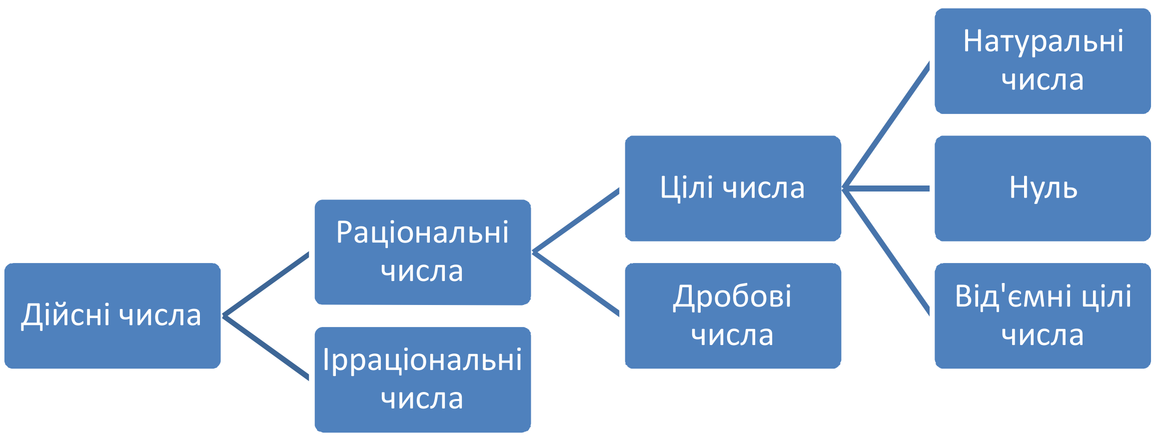

Рис. 2.1

2.1.1. Властивості дій над дійсними числами

З елементарної математики відомо, що дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити і порівнювати.

Додавання. Будь-якій парі дійсних чисел x та y єдиним чином відповідає число, яке звуть їхньою *сумою* і позначають $x+y$:

$$x, y \mapsto x+y.$$

При цьому:

I. $x+y=y+x$ (*комутативність додавання*);

II. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (*асоціативність додавання*);

III. $x+0=x$ (*існування нуля* — нейтрального елементу щодо додавання);

IV. $x+(-x)=0$ (*існування протилежного елементу*), число $(-x)$ звуть *протилежним до* x.

Число $x+(-y)$ звуть *різницею чисел* x та y і позначають

$$x-y \stackrel{\text{def}}{=} x+(-y).$$

Множення. Будь-якій парі дійсних чисел x та y єдиним чином відповідає число, яке звуть їхнім *добутком* і позначають $x \cdot y$.

$$x, y \mapsto x \cdot y.$$

При цьому:

V. $x \cdot y=y \cdot x$ (*комутативність множення*);

VI. $x \cdot(y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$ (*асоціативність множення*);

VII. $1 \cdot x=x$ (*існування одиниці*);

VIII. $x \cdot x^{-1}=1$ $(x \neq 0)$ (*існування оберненого елементу*); число $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ звуть *оберненим до* x.

Число $x \cdot y^{-1}$ звуть *часткою від ділення* x *на* y і позначають

$$\frac{x}{y} \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y^{-1} \quad (y \neq 0).$$

Зв'язок додавання і множення виражає властивість *дистрибутивності множення щодо додавання*:

IX. $(x+y) \cdot z=x \cdot z+y \cdot z$.

Упорядкованість. Для дійсних чисел визначено відношення порядку, яке полягає в наступному.

Для будь-яких різних чисел x та y $(\Leftrightarrow x \neq y)$ правдиве лише одне із двох співвідношень: або $x<y$, або $y<x$. При цьому:

X. $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$ (*транзитивність*);

XI. $x<y \Rightarrow x+z<y+z$;

XII. $x>y \Rightarrow xz>yz$ $(z>0)$.

Із властивостей XI та XII випливає властивість *щільності* множини дійсних чисел:

для будь-яких двох різних дійсних чисел, приміром, $x < y$, існує таке число z, що $x < z < y$.

XIII. **Неперервність.** Для будь-яких непорожніх множин дійсних чисел X та Y таких, що для кожної пари чисел $x \in X$ і $y \in Y$ виконано нерівність $x \le y$,

$$\exists a : x \le a \le y, x \in X, y \in Y.$$

Множину дійсних чисел, тобто чисел, для яких виконано аксіоми I– XIII, позначають $\mathbb{R}$.

2.2. Числова пряма. Числові проміжки

2.2.1. Числова пряма

Дійсні числа зображують точками прямої. А саме, на деякій горизонтальній прямій, виберімо додатний напрям (зліва направо), початок відліку — точку O й одиницю масштабу. Точці M_1, що лежить на прямій справа від точки O, зіставмо число $x_1 = \left|OM_1\right|$ — довжину відрізка OM_1; точці M_2, що лежить на прямій зліва від точки O,— число $x_2 = -|M_2O| < 0$; точці O — число 0 (рис. 2.2).

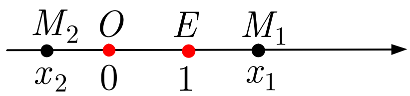

Рис. 2.2

Означення 2.1. Число x, що відповідає точці M, звуть *координатою точки* M, а пряму з описаною відповідністю звуть *числовою прямою*.

Числова пряма дозволяє ілюструвати розташування дійсних чисел. Нерівність $x_1 < x_2$ означає, що точка x_1 лежить зліва від точки x_2; подвійна нерівність $x_1 < x_3 < x_2$ означає, що точка x_3 лежить між точками x_1 та x_2 (рис. 2.3).

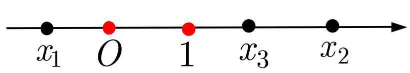

Рис. 2.3

Але числа можна зображувати не лише точками прямої, а й точками кола.

Побудуймо коло C, дотичне до числової прямої в початку відліку (Нойманове коло). Точку кола, протилежну точці O, позначмо O' (рис. 2.4).

Для того щоб відобразити точку M числової прямої з координатою x на коло, проведімо пряму $O'M$. Вона, крім точки O', перетне коло в якійсь єдиній точці Q, яку назвімо *проекцією* точки M на коло C. Точку Q звуть *Неймановим зображенням* числа x.

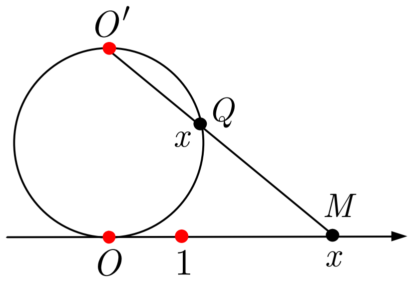

Рис. 2.4

Будь-якому числу x на числовій прямій відповідає єдина точка на колі, що лежатиме на лівому чи правому півколі, залежно від того, від'ємне x чи додатне (рис. 2.5). При цьому не всі точки кола вичерпаються. Точка O' лишиться вільною. Її вважатимемо за геометричний образ нескінченності ∞.

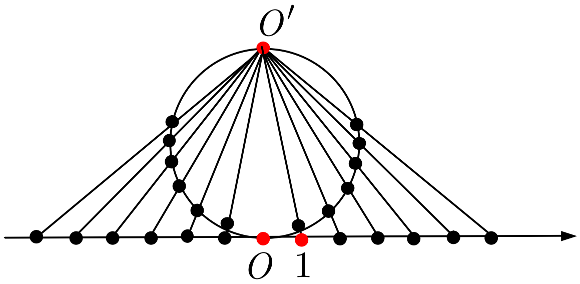

Рис. 2.5

Зручно також доповнити множину дійсних чисел елементами, які позначають $+\infty$ та $-\infty$, звуть їх *плюс нескінченністю* та *мінус нескінченністю*, вважаючи при цьому, що:

$$-\infty < +\infty; \ \forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty.$$

Множину $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ звуть *розширеною множиною дійсних чисел* ($\Leftrightarrow$*розширеною числовою прямою*).

2.2.2. Модуль дійсного числа

Модулем ($\Leftrightarrow$*абсолютною величиною*) дійсного числа x звуть число

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля $|x|$ — віддаль від точки x до точки O; число $|b-a|$ має зміст віддалі між точками a та b (рис. 2.6).

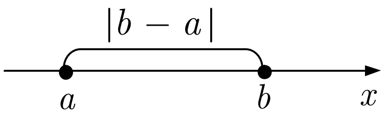

Рис. 2.6

Основні властивості модуля:

$$1)\ x=y\Rightarrow |x|=|y|;\quad 2)\ |x|\ge 0;$$
$$3)\ -|x|\le x\le |x|;\qquad 4)\ |x|=|-x|;$$
$$5)\ |x+y|\le |x|+|y|;\quad 6)\ |x-y|\ge |x|-|y|;$$
$$7)\ |xy|=|x||y|;\qquad 8)\ \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}.$$

З властивостей модуля випливають такі важливі наслідки:

1°. $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a, a\ge 0$.

2°. $|x|\ge a \Leftrightarrow x\le -a \vee x\ge a, a\ge 0$.

2.2.3. Числові проміжки

Для числових проміжків використовують такі назви і позначення:

відрізок	$[a;b]$	$a\le x\le b$	
інтервал	$(a;b)$	$a< x< b$	
півінтервал	$[a;b)$	$a\le x< b$	
	$(a;b]$	$a< x\le b$	

Інтервали $(a;b)$, відрізки $[a;b]$ та півінтервали $(a;b],[a;b)$ звуть *проміжками*, точки a та b — їхніми *кінцями*, а точки $x:\ a<x<b$ — їхніми *внутрішніми точками*.

Означення 2.2. Інтервал, який містить точку $x_0\in\mathbb{R}$, звуть *околом* точки x_0.
Інтервал

$$(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)=$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}\mid |x-x_0|<\varepsilon\right\}\overset{\text{den}}{=}U_\varepsilon(x_0),\varepsilon>0,$$

звуть ε-*околом* точки $x\in\mathbb{R}$ (рис. 2.7). Число x_0 — центр околу, ε — його радіус.

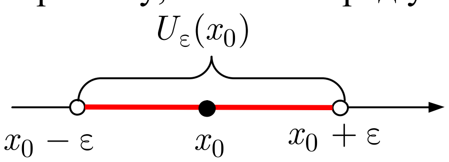

Рис. 2.7

Оскільки

$$x\in U_\varepsilon(x_0)\Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\Leftrightarrow |x-x_0|<\varepsilon,$$

то виконання нерівності $|x-x_0|<\varepsilon$ означає потрапляння точки x в ε-окіл точки x_0.

Теорема 2.1. Дійсні числа мають властивість *відокремлюванності*:

якщо a та b — два різні дійсні числа, то їх завжди можна відокремити одне від одного неперетинними околами (рис. 2.8).

Рис. 2.8

►Нехай $a \neq b$. Тоді $|a-b| > 0$. Для $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$ околи $U_\varepsilon(a)$ та $U_\varepsilon(b)$ не перетинаються.

Справді, якщо околи $U_\varepsilon(a)$ та $U_\varepsilon(b)$ мають хоча б одну спільну точку, то

$$|a-x| < \varepsilon, |b-x| < \varepsilon.$$

Звідси маємо

$$|a-b| = |a-x+x-b| < |a-x| + |b-x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|.$$

Тобто $|a-b| < |a-b|$, що неможливо.◄

Дуга кола, яка не містить точку O', є зображенням околу точки x_0. З'ясуймо які точки зображує симетрична щодо точки O' дуга (рис. 2.9).

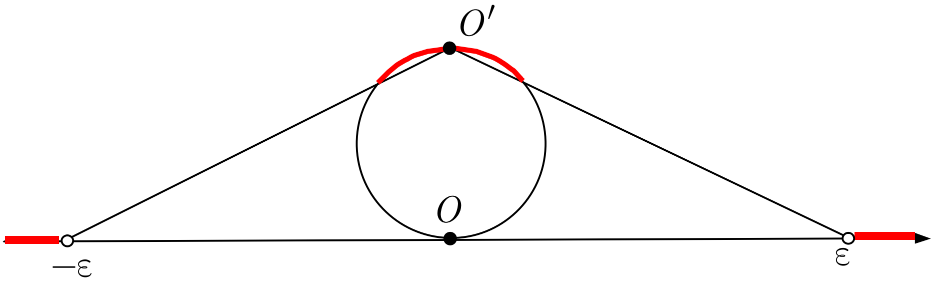

Рис. 2.9

Слушно вважати її зображенням околу ∞.

Означення 2.3. ε-околом нескінченості звуть множину (рис. 2.10)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty) \overset{\text{den}}{=} U_\varepsilon(\infty$$

ε-околом плюс нескінченості звуть множину (рис. 2.11)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon\} = (\varepsilon; +\infty) \overset{\text{den}}{=} U_\varepsilon(+\infty), \varepsilon > 0.$$

ε-околом мінус нескінченості звуть множину (рис. 2.12)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon\} = (-\infty; -\varepsilon) \overset{\text{den}}{=} U_\varepsilon(-\infty), \varepsilon > 0$$

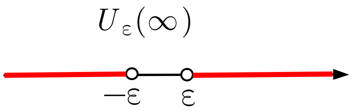

Рис. 2.10

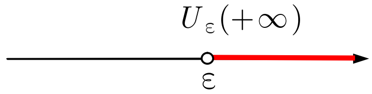

Рис. 2.11

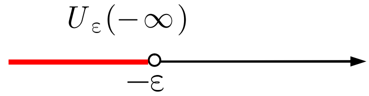

Рис. 2.12

Множини:

$$(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad [a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\},$$

$$(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\},$$

$$(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$$

звуть *необмеженими проміжками*.

Про відображення множин і рівнопотужні множини див. *п. 2.5.2* і *п. 2.5.3.*

2.3. Обмежені і необмежені множини. Верхні і нижні межі множин

2.3.1. Обмежені і необмежені множини

Розгляньмо числову множину A.

Означення 2.4. Множину $A \subset \mathbb{R}$ звуть *обмеженою зверху*, якщо існує таке число M, яке звуть *верхньою межею* множини A, що для будь-якого числа $x \in A$ виконано нерівність

$$x \le M.$$

Означення 2.5. Множину $A \subset \mathbb{R}$ звуть *обмеженою знизу*, якщо існує таке число m, яке звуть *нижньою межею* множини A, що для будь-якого числа $x \in A$ виконано нерівність

$$x \ge m.$$

Приміром, множина $E = (-\infty;1]$ обмежена зверху числом 1; множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ обмежена знизу числом 1.

Означення 2.6. Множину, обмежену зверху і знизу, звуть *обмеженою*. Множину, що не є обмеженою зверху (знизу), звуть *необмеженою зверху* (*необмеженою знизу*).

Приміром, множина натуральних чисел необмежена зверху; множина всіх від'ємних чисел необмежена знизу.

Вправа 2.1. Написати з допомогою кванторів означення обмеженої знизу множини. Заперечити це означення, користуючись правилом побудови заперечень.

Розв'язання вправи 2.1 див. у *п. 2.5.4.*

2.3.2. Точна верхня і точна нижня межі множини

Будь-яка обмежена зверху множина має нескінченно багато верхніх меж. Справді, якщо M — верхня межа множини A, то будь-яке дійсне число $M^* > M$ також є верхньою межею множини A.

Означення 2.7. Найменшу з усіх верхніх меж обмеженої зверху множини $A \subset \mathbb{R}$ звуть *точною верхньою межею*. Інакше кажучи, дійсне число M є точною верхньою межею множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо:

1) $\forall x \in A : x \leq M$;
2) $\forall M' < M \, \exists x_0 \in A : x_0 > M'$.

Точну верхню межу множини A позначають $\sup A$ (читають «супремум A»).

Для необмеженої зверху множини пишуть $\sup A = +\infty$.

Означення 2.8. Найбільшу з усіх нижніх меж обмеженої знизу множини $A \subset \mathbb{R}$ звуть *точною нижньою межею*. Інакше кажучи, дійсне число m є точною нижньою межею множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо:

1) $\forall x \in A : x \geq m$;
2) $\forall m' > m \, \exists x_0 \in A : x_0 < m'$.

Точну нижню межу множини позначають $\inf A$ і читають «інфімум A».

Для необмеженої знизу множини A пишуть $\inf A = -\infty$.

Правдивим є

Твердження 2.1. Будь-яка обмежена зверху непорожня множина дійсних чисел має точну верхню межу, а будь-яка обмежена знизу — точну нижню межу.

Точна верхня (точна нижня) межа множини A може як належати, так і не належати їй. У разі, якщо точна верхня (нижня) межа належить множині A, вона збігається з найбільшим (найменшим) елементом цієї множини, які позначають $\max A$ $(\min A)$ і читають «максимум A (мінімум A)», тобто

$$\sup A = \max A \ (\inf A = \min A).$$

2.4. Скінченні множини. Біноміальна формула Ньютона

2.4.1. Скінченні множини

Комбінацією з n елементів по k звуть k-елементну підмножину n-елементної множини.

Можна довести, що кількість комбінацій з n елементів по k, яку позначають

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Числа C_n^k мають властивості:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}, k = \overline{0, n}$;
2) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
3) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = \overline{0, n-1}$.

Числа C_n^k можна послідовно знаходити з допомогою Паскалевого трикутника (рис. 2.13), де кожне число, крім крайніх двох, які дорівнюють одиниці, дорівнює сумі відповідних чисел з попереднього рядка.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \boxed{1} & & \boxed{2} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & 1 & & 3 = 1 + 2, \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & 6 = 3 + 3... \\
 & & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\
 & & C_n^0 & \ldots & & C_n^k & & \ldots & C_n^n & &
\end{array}
$$

Рис. 2.13

Множину A з n елементів звуть *упорядкованою*, якщо кожному елементові цієї множини зіставлено певне число (його номер) від 1 до n, так, що різним елементам відповідають різні номери.

Різні впорядковані n-елементні підмножини n-елементної множини звуть *перестановками* цієї множини.

Кількість можливих перестановок n-елементної множини, яку позначають

$$P_n = n!.$$

Розміщенням з n елементів по k звуть упорядковану k-елементну підмножину n-елементної множини.

Приміром, із трьох елементів a, b, c по два можна утворити розміщення ab, ba, ac, ca, bc, cb.

Кількість розміщень з n елементів по k, яку позначають

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отже, правдива рівність

$$A_n^k = C_n^k P_k.$$

2.4.2. Біноміальна формула Ньютона

Біномом звуть суму або різницю двох алгебричних виразів.

Твердження 2.2. Для будь-якого натурального n правдива *біноміальна формула Ньютона*

$$(a+b)^n =$$
$$= b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + ... + C_n^{n-1} a^{n-1} b + a^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

де C_n^k — *біноміальні коефіцієнти*; $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ —

розклад степеня бінома.

Доведення твердження 2.2 див. у *п. 2.5.5.*

Оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$, то

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Вправа 2.2. Довести, що: 1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; 2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k = 0$.

Розв'язання вправи 2.2 див. у *п. 2.5.6.*

2.5. Додаткові відомості

2.5.1. Доведення ірраціональності числа $\sqrt{2}$

Число $\sqrt{2}$ не є цілим, оскільки серед цілих чисел немає числа, квадрат якого дорівнював би 2.

Доведімо, що $\sqrt{2}$ не може бути раціональним числом.

Нехай $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, де p та q взаємно прості цілі числа, причому $q \neq 1$. Тоді за означенням кореня $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Але за припущенням p та q — взаємно прості числа, $q^2 \neq 1$. Отже, $\dfrac{p^2}{q^2}$ — нескоротний дріб і рівність $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$ суперечлива. Тому $\sqrt{2}$ не може дорівнювати дробу $\dfrac{p}{q}$ і не є раціональним числом.

Очевидно, що $1^2 < 2 < 2^2$. Розглядаючи квадрати чисел $1,0; 1,1; \ldots; 2,0$, переконуємося, що $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$. Так само, розглядаючи квадрати чисел $1,40; 1,41; \ldots; 1,50$, дістаньмо, що $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$. Продовжуючи цей процес далі, матимемо: $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2; (1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2$ і т. д. без кінця.

Квадрати чисел $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \ldots$ як завгодно близько наближаються до числа 2, залишаючись меншими від 2. Тому, вважають, що $\sqrt{2}$ дорівнює нескінченному десятковому дробу $1,4142\ldots$

2.5.2. Відображення множин

Нехай задано множини X, Y і правило f, за яким кожному елементові $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$.

Тоді кажуть, що задано *відображення* f *множини* X *у множину* Y ($\Leftrightarrow$*функцію*, означену на множині X, із значеннями у множині Y) і позначають $f : X \to Y$ або $X \xrightarrow{f} Y$ (читають «f відображує X в Y») (рис. 2.14).

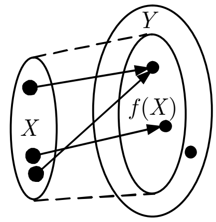

Рис. 2.14

Множину X звуть *областю означення* відображення f і позначають $D(f)$. Елемент $y \in Y$, у який відображено елемент $x \in X$, звуть *образом елементу* x при відображенні f ($\Leftrightarrow$ значенням функції f, що відповідає значенню аргументу x) і позначають $f(x)$. При цьому x звуть *прообразом елементу* $f(x)$. Для відображення ще використовують позначення:

$$y = f(x), x \in X; \;\; x \mapsto f(x), x \in X.$$

Множину образів усіх елементів $x \in X$ при відображенні f звуть *образом множини* X при цьому відображенні ($\Leftrightarrow$ *множиною значень функції*) і позначають

$$f(X) = E(f) \overset{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y.$$

Якщо $y_0 \in E(f)$, то існує принаймні одне значення $x_0 \in D(f)$, таке, що $y_0 = f(x_0)$.

Отже, щоб задати відображення, треба задати трійку

(X, Y, f),

де

X — відображувана множина;

Y — множина, що містить образи елементів X;

f — правило, за яким кожному елементові $x \in X$ зіставляється єдиний елемент $y \in Y$ ($\Leftrightarrow$правило, що перетворює кожний $x \in X$ в $y \in Y$)(рис. 2.15).

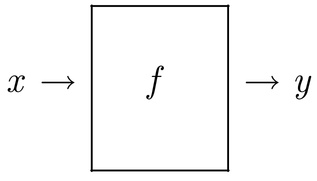

Рис. 2.15

Означення 2.9. Відображення $f : X \to Y$ звуть *взаємно однозначним*, якщо кожний елемент $y \in Y$ є образом лише одного елементу $x \in X$ (рис. 2.16).

$$f \text{ — взаємно однозначне відображення} \Leftrightarrow$$
$$\forall y \in Y \, \exists! \, x \in X : f(x) = y.$$

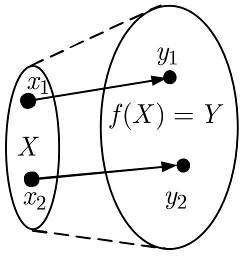

Рис. 2.16

2.5.3. Рівнопотужні множини

Множину звуть *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. Приміром, скінченною є множина всіх мешканців певного міста, множина студентів у аудиторії. Непорожню множину звуть *нескінченною*, якщо вона не є скінченною. Приміром, множина $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$ усіх натуральних чисел є нескінченною множиною.

Хотілось би мати можливість порівнювати «місткість» множин. Почнімо з прикладу.

Нехай треба встановити, чи однакова кількість стільців і студентів у лекційній аудиторії. Це можна зробити двома способами. По-перше, можна порахувати кількість студентів та кількість стільців, а потім порівняти між собою одержані результати. Цей спосіб спрацює для скінченної множини. Однак ним неможливо скористатися, перевіряючи, чи однакова кількість елементів у множинах натуральних і раціональних чисел.

Інший спосіб полягає в тому, що студентам пропонують сісти на місця в аудиторії і перевіряють, чи є вільні стільці або студенти, яким не вистачило стільців. Якщо виявиться, що усі студенти сидять, і на кожному стільці сидить лише один студент, а вільних місць немає, то кількість студентів і стільців однакова.

Розгляньмо цю ситуацію математично. Нехай X — множина стільців у аудиторії, Y — множина студентів. Означмо відображення $f : X \to Y$, узявши за область означення $D(f)$ множину тих стільців, на яких сидять студенти, а за значення відображення $f(x)$ при $x \in D(f)$, того студента, який сидить на стільці x.

Описаний вище випадок відповідає взаємно однозначному відображенню f.

Якщо між двома скінченними множинами A та B вдалося встановити взаємно однозначну відповідність, то множини A та B містять однакову кількість елементів.

Множини A та B, між якими можна встановити взаємно однозначну відповідність, звуть *рівнопотужними* ($\Leftrightarrow$ *еквівалентними*) і позначають $A \sim B$.

Приміром, нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, A — множина парних натуральних чисел. Встановімо між ними взаємно однозначну відповідність співвідношенням $n \leftrightarrow 2n$, тобто

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & ..., & n, & ... \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & ... & 2n, & .... \end{array}$$

Отже, множина всіх натуральних чисел рівнопотужна своїй підмножині парних натуральних чисел.

Нескінченну множину A звуть *зліченною*, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел, тобто $A \sim \mathbb{N}$. У цьому разі елементи множини A можна занумерувати.

Чи існують нескінченні множини більшої потужності, ніж зліченні? Так, множина еквівалентна відрізку $[0;1]$, має потужність *континууму* — потужності множини дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Вправа 2.3. Показати, що множина точок відрізка $[0;1]$ не зліченна.

❍ Доведімо твердження вправи від супротивного. Припустімо, що множина точок відрізка $[0;1]$ є зліченною, тобто існує спосіб її нумерування. Записуючи числа, вважаємо, що в них немає дев'ятки в періоді. Розташуємо всі числа, зображені нескінченними десятковими дробами, у порядку цієї нумерації:

$$0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$

$$0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Розгляньмо будь-який нескінченний дріб $0,b_1b_2b_3\ldots$ такий, що

$$b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33}, \ldots.$$

Цей дріб не може бути серед занумерованих, оскільки від 1-го числа він відрізняється 1-ю цифрою, від 2-го — 2-ю тощо. Отже, всі числа з відрізка $[0;1]$ не можна занумерувати, так що множина точок відрізка $[0;1]$ не зліченна. Метод доведення звуть діагональним методом Кантора. ●

Вправа 2.4. 1. Показати, що множини точок двох відрізків $[a;b]$ і $[c;d]$ рівнопотужні між собою.

2. Показати, що множина точок інтервалу $(0;1)$ еквівалентна множині всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$.

❍ 1. Розташуємо ці відрізки на паралельних прямих і через кінці відрізків проведімо прямі до їх перетину в точці O (рис. 2.17). З точки O проведімо всілякі промені, що перетнуть обидва відрізки. Тоді будь-якій точці $P \in [a;b]$ відповідає єдина точка $Q \in [c;d]$, і, навпаки, тобто, між точками відрізків $[a;b]$ та $[c;d]$ існує взаємно однозначна відповідність.

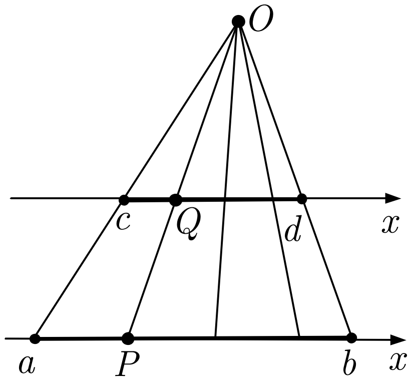

Рис. 2.17

2. Інтервал $(0;1)$ відображує на множину $\mathbb{R}$ функція $f(x) = -\operatorname{ctg} \pi x$. Отже, $(0;1) \sim \mathbb{R}$. ●

2.5.4. Розв'язання вправи 2.1

Множина A обмежена знизу, якщо $\forall x \in A \, \exists m : m \leq x$.

Сформулюймо заперечення цього твердження, міняючи квантор $\forall$ на $\exists$ і навпаки, нерівність — на протилежну:

Множина A необмежена знизу, якщо $\exists x \in A \, \forall m : m > x$.

2.5.5. Доведення твердження 2.2

Розгляньмо добуток n біномів

$$(b + a_1)(b + a_2)...(b + a_n).$$

Розкриваючи дужки, дістанемо

$$(b + a_1)(b + a_2)...(b + a_n) = b^n + S_1 b^{n-1} + S_2 b^{n-2} + ... + S_n,$$

де

$$S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n;$$

$$S_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + ... + a_{n-1} a_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 a_2 ... a_n.$$

Коефіцієнт при b^{n-1} є сумою всіляких комбінацій з елементів $a_1, ..., a_n$ по одному, тому кількість доданків дорівнює C_n^1.

Коефіцієнт при b^{n-2} є сумою добутків елементів усіляких комбінацій з елементів $a_1, ..., a_n$ по два, тому кількість доданків дорівнює C_n^2.

Взагалі, коефіцієнт при $b^k, k = 0, 1, ..., n$, є сумою добутків елементів усіляких комбінацій з елементів $a_1, ..., a_n$ по k, тому кількість доданків дорівнює C_n^k.

Якщо $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$, то дістанемо шукану формулу.

$$(b + a)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + ... + C_n^k a^k b^{n-k} + ... + C_n^n a^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

2.5.6. Розв'язання вправи 2.2

Якщо у формулі бінома Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

покласти:

1) $a = b = 1$, то матимемо, що

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n;$$

2) $a = 1, b = -1,$ то матимемо, що

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$