Модуль 3. Числові функції

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 3.1—3.3) і розширеному (розділи 3.1—3.4).

У модулі розглянуто:

— основні поняття щодо числових функцій;

— елементи поведінки функції: нулі функції, симетрія графіка функції, періодичність, монотонність, обмеженість функції;

— обернену функцію;

— складену функцію.

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями).

Теоретична частина

3.1. Числові функції

3.1.1. Означення функції

Нехай задано числові множини X, Y і правило f, за яким кожному елементові $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$.

Тоді кажуть, що задано *функцію*, означену на множині X, із значеннями у множині Y і позначають

$$f : X \to Y \text{ або } X \xrightarrow{f} Y$$

(читають «f відображує X в Y»).

Множину X звуть *областю означення* відображення f і позначають $D(f)$. Елемент $y \in Y$, у який відображено елемент $x \in X$, звуть *значенням функції* f, що відповідає значенню аргументу x і позначають $f(x)$.

Множину всіх $y \in Y$, які є значеннями функції f, звуть *множиною значень* функції f і позначають $E(f)$.

Для функції ще використовують позначення:

$$y = f(x), x \in X;$$

$$x \mapsto f(x), x \in X.$$

Отже, функція $y = f(x), x \in X$ перетворює кожен x із множини $D(f)$ в $y = f(x)$ із множини $E(f)$ (рис. 3.1).

$$x \to \boxed{\;f\;} \to y$$

Рис. 3.1

Функція $x \mapsto \sin x$ відображує множину $\mathbb{R}$ у множину $\mathbb{R}$, але $X = \mathbb{R}, Y = [-1;1] \subset \mathbb{R}$. Для функції $\log_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ область означення $X = (0;\infty)$, а область значень $Y = \mathbb{R}$.

У разі, якщо $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, відображення $f : X \to Y$ ще звуть *дійсною функцією дійсного аргументу* ($\Leftrightarrow$ скалярною функцією скалярного аргументу) або, коротше, *числовою функцією*.

Коли з контексту зрозуміло, яка область означення і множина значень функції, використовують позначення $y = f(x)$ чи, навіть, f.

Функції f_1 та f_2 вважають *рівними*, якщо вони мають одну й ту саму область означення X і

$$f_1(x) = f_2(x) \, \forall x \in X$$

і пишуть $f_1 = f_2$.

Приміром, функції $y = |x|, x \in \mathbb{R}$, та $y = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{R}$, рівні, а функції $y = x^2, x \in \mathbb{R}$, $y = x^2, x \in [0;1]$ — ні.

Нехай функції f та g означені на одній і тій самій множині X. Тоді функції, значення яких у кожній точці $x \in X$ дорівнюють

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x) \neq 0 \ \forall x \in X),$$

звуть відповідно *сумою*, *різницею*, *добутком* і *часткою* функцій f та g і позначають $f + g, f - g, fg, \dfrac{f}{g}$.

3.1.2. Графік числової функції

Розгляньмо числову функцію $f : X \to Y$, що відображує числову множину $X \subset \mathbb{R}$ у числову множину $Y \subset \mathbb{R}$.

Зауваження 3.1. Кожному значенню аргументу відповідає одне значення функції, але різним значенням аргументу можуть відповідати одні й ті самі значення функції. Функція може в усій області означення набувати кількох або навіть одного значення.

Якщо множина значень функції містить лише одне число C, то таку функцію звуть *сталою* і пишуть $f = C$.

Означення 3.1. Множину точок площини Oxy з координатами $(x; f(x)), x \in X$, звуть *графіком* Γ функції f, означеної на множині $X \subset \mathbb{R}$.

Частіше за все графік функції — деяка лінія; якщо $D = \mathbb{N}$, то графіком функції буде набір ізольованих точок. Не всяка лінія буде графіком числової функції, приміром, коло $x^2 + y^2 = R^2$ — не є графіком функції, оскільки одному значенню x відповідає два значення y_1 та y_2 (рис. 3.2).

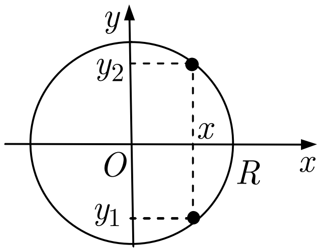

Рис. 3.2

3.1.3. Способи задавання функції

1. Аналітичний спосіб полягає в тому, що з допомогою формули вказують спосіб обчислення значень функції f для кожного значення $x \in D(f)$.

При аналітичному задаванні функції область означення $D(f)$ або вказують, приміром, $f(x) = x^2, x \in [0;1]$, або розуміють під $D(f)$ множину значень аргументу x, за яких формула має сенс. У цьому разі кажуть, що $D(f)$ — *природна область означення* функції f.

А. Аналітично функцію можна задавати *явно*:

— однією формулою — явне задавання функції, приміром $f(x) = \sin x$ (природна область означення $D(f) = \mathbb{R}$);

— кількома формулами, приміром,

одинична функція Гевісайда (рис. 3.3)

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

функція знак числа (*сигнум*) (рис. 3.4)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

функція Діріхле

$$y = \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

графік якої зобразити неможливо.

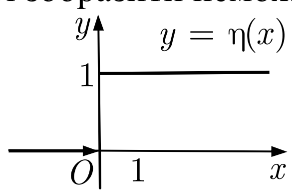

Рис. 3.3

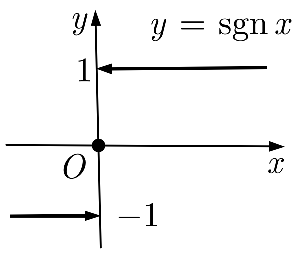

Рис. 3.4

Б. Аналітично функцію $y = f(x), x \in X$, можна задати *неявно* — рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

якщо $\forall x \in X : F(x, f(x)) = 0$.

Інколи, розв'язавши рівняння $F(x, y) = 0$ щодо y, вдається одержати явне задання тієї самої функції.

Приміром, рівняння $x - y^2 = 0$ задає дві функції $y_1(x) = \sqrt{x}$ $(D(f) = [0; +\infty))$ та $y_2 = -\sqrt{x}$ $(D(f) = [0; +\infty))$.

В. Якщо залежність y від x задано не безпосередньо, а замість неї задано залежності обох змінних x та y від деякої третьої змінної t у вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in T \subset \mathbb{R},$$

то кажуть, що функцію задано *параметрично*; допоміжну змінну t звуть *параметром*. Приміром (рис. 3.5),

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi.$$

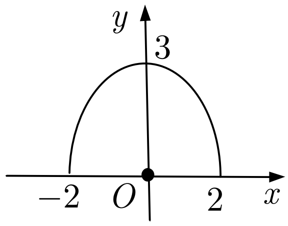

Рис. 3.5

Аналітичний спосіб задавання функції є найзручнішим, оскільки до нього застосовні методи математичного аналізу, що дозволяє ефективно досліджувати функції.

2. Графічний спосіб задавання функції — функцію задають її графіком у деякій системі координат; абсциси точок графіка належать області означення функції, а ординати рівні відповідним значенням функції (у прямокутній Декартовій системі координат).

Графічний спосіб задавання функції наочний, але не зручний для застосування математичного апарату.

3. Табличний спосіб задавання функції — функцію задають таблицею низки значень аргументу і відповідних значень функції. Область означення такої функції — набір значень аргументу, перерахованих у таблиці.

4. Алгоритмічний (програмний) спосіб — функцію задають програмою на одній з мов програмування.

5. Описовий спосіб — функцію задають словесним описом відповідності f, що дозволяє за заданим $x \in D(f)$ визначити $y \in E(f)$. Приміром, функцію $y = [x]$ — *цілу частину числа* задають описом — це «найбільше ціле число, що не перевищує x» (рис. 3.6).

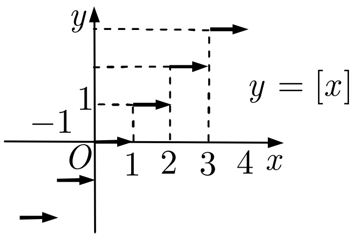

Рис. 3.6

Отже,

$$[x] = n \in \mathbb{Z} : n \le x < n + 1.$$

Приміром, $[0,5] = 0, [\,3\,] = 3, [-2] = -2, [-2,5] = -3.$

3.2. Основні характеристики поведінки функції

Однією з основних задач математичного аналізу є вивчення поведінки функцій $y = f(x), x \in X,$ і побудова їхніх графіків.

3.2.1. Нулі і знак функції на множині $X \subset D(f)$

Значення $x \in D(f)$, за якого функція f дорівнює нулеві, звуть *нулем функції*, тобто нулі функції — це корені рівняння $f(x) = 0$.

В інтервалі, на якому функція додатна, графік її розташований над віссю Ox, а в інтервалі, на якому вона від'ємна,— під віссю Ox; у точках перетину з віссю абсцис функція дорівнює нулеві.

3.2.2. Парність і непарність функції

Означення 3.2. Функцію f звуть *парною*, якщо:
1) область її означення симетрична щодо точки O;
2) для кожного x з області означення виконано рівність

$$f(-x) = f(x).$$

Функцію f звуть *непарною*, якщо:
1) область її означення симетрична щодо точки O;
2) для кожного x з області означення виконано рівність

$$f(-x) = -f(x).$$

Функцію f звуть *функцією загального вигляду*, якщо вона не є парною, і не є непарною.

Символічні записи означень цього розділу див. у *п. 3.4.1.*

Графік парної функції симетричний щодо осі Oy, а непарної — щодо початку координат (рис. 3.7).

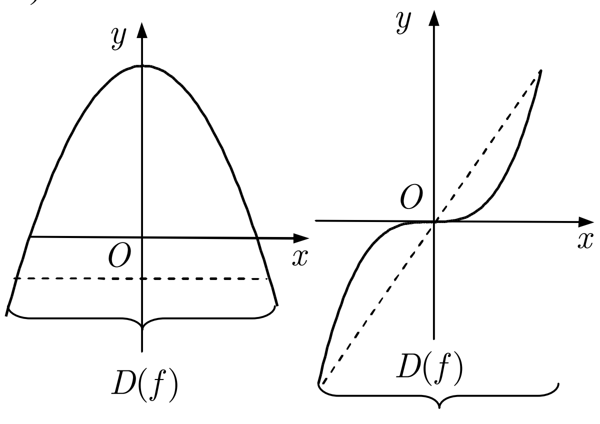

Рис. 3.7

Приміром, $y = x^2, y = \cos x, y = |x|$ — парні функції; $y = x^3, y = \sin x$, $y = \operatorname{sgn} x$ — непарні функції; $y = x - 1, y = \sqrt{x}$ — функції загального вигляду.

Зауваження 3.2. Зміна знаку перед функцією не міняє її парності. Сума парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією. Добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією.

Вправа 3.1. Довести, що будь-яку функцію f, означену на відрізку $[-a; a]$, можна зобразити як суму парної і непарної функцій.

Розв'язання вправи 3.1 див. у *п. 3.4.2.*

Вправа 3.2. Довести, що добуток двох парних або двох непарних функцій — функція парна, а добуток парної і непарної функцій — функція непарна.

Розв'язання вправи 3.2 див. у *п. 3.4.3.*

3.2.3. Періодичність функції

Означення 3.3. Функцію f звуть *періодичною*, якщо існує число $T \neq 0$, таке, що:
1) для кожного x з області означення $x+T$ та $x-T$ теж належать області означення;
2)
$$f(x-T) = f(x+T) = f(x).$$
Число T звуть *періодом* функції f.

Якщо T — період функції f, то її періодами також будуть числа $mT, m \in \mathbb{Z}$.

Якщо існує найменший додатний період функції, то його звуть *основним періодом*. Якщо T — період функції f, то досить побудувати її графік на одному із проміжків завдовжки T, а потім паралельно перенести його вздовж осі Ox на $Tm, m \in \mathbb{Z}$.

Приміром, функція $f(x) = \cos x$ — періодична з основним періодом 2π; функція $y = \{x\} = x - [x]$ — «дробова частина x» — періодична з основним періодом 1 (рис. 3.8).

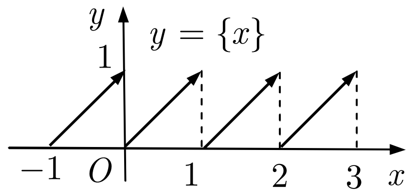

Рис. 3.8

Зауваження 3.3. Якщо функція $y = f(x), x \in D(f)$, періодична з періодом T, то функція $y = f(\omega x)$ — періодична з періодом $\dfrac{T}{\omega}$.

До періодичних функцій належить і функція-стала
$$f(x) = c = \text{const}, D(f) = \mathbb{R}.$$

Будь-яке число $T \in \mathbb{R}$ є періодом цієї функції, але основного періоду функція не має.

Вправа 3.3. Довести, що якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = f(ax+b), a \neq 0$, періодична з періодом $\dfrac{T}{a}$.

Розв'язання вправи 3.3 див. у *п. 3.4.4.*

3.2.4. Монотонність функції

Означення 3.4. Функцію $y = f(x), x \in D$, звуть *зростаючою* (*спадною*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції (рис. 3.11) і позначають $f \nearrow$ $(f \searrow)$.
Функцію $y = f(x), x \in D(f)$, звуть *неспадною* (*незростаючою*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає не менше (не більше) значення функції (рис. 3.12).

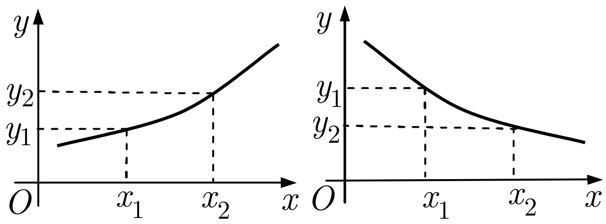

Рис. 3.11

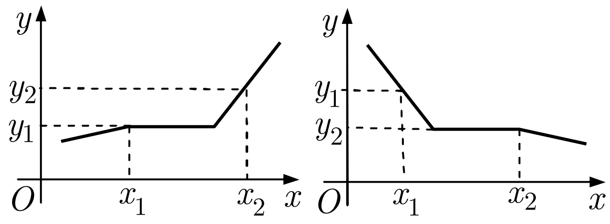

Рис. 3.12

Зростаючі, спадні, неспадні і незростаючі функції звуть *монотонними*; зростаючі і спадні — *строго монотонними*.

Приміром, функція $y = 2^x$ — зростаюча; $y = [x]$ — неспадна; сталу функцію $y = c$ можна звати як незростаючою, так і неспадною.

3.2.5. Обмеженість функції

Функцію f звуть *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині $X \subset D(f)$ (рис. 3.13), якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$, що для будь-яких $x \in X$ виконано умову

$$f(x) \leq M \quad (M \leq f(x)).$$

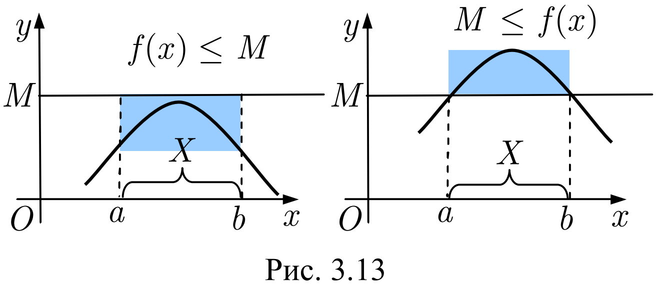

Рис. 3.13

Означення 3.5. Функцію f звуть *обмеженою* на множині $X \subset D(f)$ (рис. 3.14), якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ виконано умову

$$\left|f(x)\right| \leq M.$$

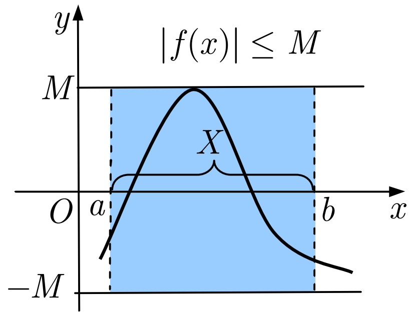

Рис. 3.14

Приміром, функція $f(x) = 2 + x^2$ є обмеженою знизу на своїй природній області означення $\mathbb{R}$, оскільки $2 \le 2 + x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Функція $f(x) = \sin x$ обмежена на своїй природній області означення $\mathbb{R}$, оскільки $|\sin x| \le 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ обмежена зверху на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, оскільки $\operatorname{tg} x \le \sqrt{3} \; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Функцію f звуть *необмеженою зверху* (*знизу*) на множині $X \subset D(f)$, якщо для будь-якого числа M існує число $x \in X$ таке, що $f(x) > M$ $(f(x) < M)$.

Приміром, функція $y = \dfrac{1}{x}$ необмежена зверху на множині $(0;1)$, оскільки для будь-якого $M > 0$ існує таке число $x \in (0;1)$ (зокрема, $x = \dfrac{1}{M+1}$), що

$$f\left(\frac{1}{1+M}\right) = 1 + M > M.$$

Якщо $M \le 0$, то за число x можна взяти будь-яке число з інтервалу $(0;1)$.

3.3. Обернена функція. Складена функція

3.3.1. Обернена функція

Розгляньмо числову функцію $y = f(x), x \in D(f)$, яка взаємно однозначно відображає множину $D(f)$ на множину $E(f)$.

Оскільки взаємно однозначна функція кожному елементу $y \in E(f)$ ставить у відповідність єдиний елемент $x \in D(f)$, то на множині $E(f)$ означено функцію $\varphi \overset{\text{den}}{=} f^{-1}$, з областю означення $E(f)$ і множиною значень $D(f)$, *обернену до функції* f. У цьому разі пишуть $x = \varphi(y)$ або $x = f^{-1}(y)$. Отже,

$$y = f^{-1}(x) : f(y) = x.$$

Якщо функція φ обернена до функції f, то функція f буде оберненою до функції φ. Про функції f та φ кажуть, що вони *взаємно обернені*.

З означення оберненої функції випливає, що функція $y = f(x)$ має обернену тоді й лише тоді, коли функція f задає взаємно однозначну відповідність між множинами D та E.

Приміром, функція $y = x^3, D(f) = E(f) = \mathbb{R}$, є взаємно однозначною, оскільки кожному значенню $x \in \mathbb{R}$ відповідає єдиний елемент $y \in \mathbb{R}$, такий, що $y = x^3$, причому y є образом лише одного елемента x (рис. 3.15) і, навпаки, кожному елементу $y \in \mathbb{R}$ відповідає лише один елемент $x \in \mathbb{R}$, такий, що $x^3 = y$. Оскільки кожному елементу $y \in \mathbb{R}$ ставиться у відповідність єдиний елемент $x \in \mathbb{R}$, то співвідношення $x = \sqrt[3]{y}$ також є функцією, оберненою до функції $y = x^3$.

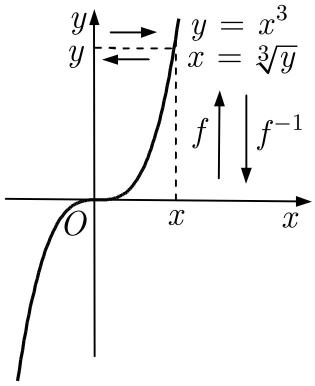

Рис. 3.15

Функція $y = x^2, D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [0; +\infty)$, не є взаємно однозначною. Справді, для кожного образу $y \in (0; +\infty)$ існує два прообрази x та $(-x)$ (рис. 3.16), а, отже, і на $E(f)$ не існує функції, оберненої до функції $y = x^2$.

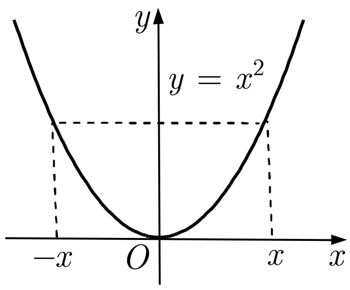

Рис. 3.16

Функцію, до якою існує обернена функція, звуть *оборотною*.

Твердження 3.1. Якщо числова функція $y = f(x)$ монотонна, то існує обернена до неї функція $x = f^{-1}(y)$. При цьому, якщо функція зростає (спадає), то обернена функція також зростає (спадає).

Зауваження 3.4. Монотонність функції є лише достатньою умовою оборотності, тобто існують немонотонні оборотні функції.

Функцію $y = f(x)$ і обернену до неї функцію $x = \varphi(y)$ зображує та сама крива. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ симетричні щодо прямої $y = x$ (рис. 3.17).

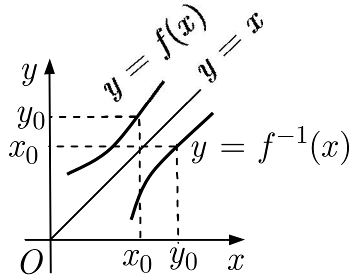

Рис. 3.17

Для того щоб знайти обернену функцію до взаємно однозначної функції $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння $y = f(x)$ щодо x (якщо це можливо).

Приміром, якщо $y = \dfrac{2}{3x-1}, x \neq \dfrac{1}{3}$, то

$$x = \frac{2+y}{3y}, x \neq \frac{1}{3}.$$

3.4.2. Складена функція

Нехай на множині D означено числову функцію $u = \varphi(x)$ із множиною значень E. Нехай на множині E задано функцію $y = f(u) : E \to F$. Тоді функція φ відображує елементи x в елементи u, а функція f відображує елементи u в елементи y (рис. 3.18):

$$x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y.$$

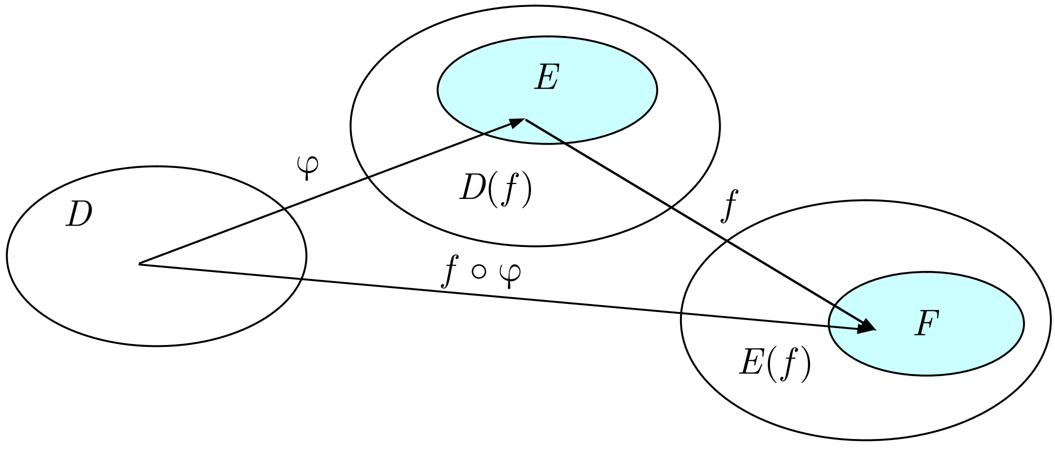

Рис. 3.18

У підсумку кожному значенню $x \in D$ зіставлено (з допомогою проміжної змінної $u \in E$) одне, цілком певне, значення $y \in F$.

У цьому разі y звуть *складеною функцією* аргументу x — пишуть $y = f(\varphi(x)), x \in D$.

Складену функцію $y = f(\varphi(x))$ звуть ще *суперпозицією функцій* f та φ і позначають $f \circ \varphi$. Отже,

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)).$$

Складену функцію $y = f(\varphi(x))$ можна записати як ланцюжок рівностей:

$$y = f(u), u = \varphi(x).$$

Приміром, складену функцію $y = \sqrt{3x+4}$ можна записати як:

$$y = \sqrt{u}, u = 3x + 4.$$

Тут

$$\varphi(x) = 3x + 4, D(\varphi) = \mathbb{R};$$

$$f(u) = \sqrt{u}, D(f) = [0; +\infty);$$

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) = \sqrt{3x+4},\ D(f \circ \varphi) = \{x \mid 3x + 4 \geq 0\}.$$

3.4. Додаткові відомості

3.4.1. Символічні записи означень

1. Графік функції $y = f(x), x \in X,\ \Gamma = \{M(x; y) \mid y = f(x), x \in X\}$.
2. Функція $y = f(x)$ — *парна* $\Leftrightarrow \forall x \in D(f) : -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)$.
3. Функція $y = f(x)$ — *непарна* $\Leftrightarrow \forall x \in D(f) : -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x)$.
4. Функцію $y = f(x)$ — *періодична* $\Leftrightarrow$

$$\exists T \neq 0\ \forall x \in D(f) : x + T \in D(f) \wedge f(x + T) = f(x).$$

5. Функція f *зростає* на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
6. Функція f *спадає* на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
7. Функція f *не спадає* на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
8. Функція f *не зростає* на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
9. Функція f *обмежена зверху на* $X \subset D(f) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M.$$

10. Функція f *обмежена знизу на* $X \subset D(f) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow M \leq f(x).$$

11. Функція f *обмежена на* $X \subset D(f) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow \left|f(x)\right| \leq M.$$

3.4.2. Розв’язання вправи 3.1

Запишімо

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), x \in [-a; a].$$

де φ — парна функція, а ψ — непарна. Тоді

$$f(-x) = \varphi(-x) + \psi(-x) = \varphi(x) - \psi(x), x \in [-a; a].$$

Додаючи і віднімаючи вирази для $f(x)$ та $f(-x)$, маємо

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

що й треба було довести.

3.4.3. Розв’язання вправи 3.2

Доведімо, приміром, що добуток двох парних функцій є парною функцією. Справді, нехай $f_1(x), x \in D(f_1), f_2(x) \in D(f_2)$, парні функції і $D(f_1) \cap D(f_2) \neq \varnothing$. Тоді, функція $g(x) = f_1(x)f_2(x), x \in D(f_1) \cap D(f_2)$, є парною функцією, оскільки

$$g(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = g(x).$$

3.4.4. Розв’язання вправи 3.3

Справді, для функції $g(x) = f(\omega x)$ маємо

$$g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x);$$
$$g\left(x - \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x - \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x - T) = f(\omega x) = g(x).$$