Модуль 4. Границя числової послідовності

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 4.1—4.4) і розширеному (розділи 4.1—4.5).

У модулі:

— розглянуто поняття границі послідовності, властивості збіжних послідовностей; нескінченно малі і нескінченно великі послідовності, їхні властивості;

— сформульовано ознаки збіжності послідовності, запроваджено число e;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

4.1. Границя числової послідовності

4.1.1. Числові послідовності

Означення 4.1. *Числовою послідовністю* звуть числову функцію f, означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, і позначають як

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots = \{x_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ звуть *членами послідовності*, а

$$x_n = f(n), n \in \mathbb{N},$$

— n-м або *загальним членом послідовності*.

Під різними членами послідовності $\{x_n\}$ розуміють члени з різними номерами, хоча може трапитись, що $x_n = x_k, n \neq k$.

Послідовність задають:

1) формулою загального члена (всяка функція $f(n), D(f) = \mathbb{N}$, визначає деяку послідовність $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, із загальним членом $x_n = f(n)$);

2) рекурентною формулою (задають кілька членів послідовності і вказують правило, за яким можна знайти наступний її член);

3) словесним описом.

Приміром,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$\{b_0 q^n\} = b_0 q, b_0 q^2, \dots, b_0 q^n, \dots;$$

$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots.$$

Послідовність Фібоначчі $\{a_n\}$ задають рекурентною формулою:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

За цією формулою:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2; a_4 = a_3 + a_2 = 3;$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5; a_6 = a_5 + a_4 = 8; \dots.$$

Отже,

$$\{a_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots.$$

Нехай послідовність $\{x_n\}$ — «послідовність простих чисел». Отже,

$$\{x_n\} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Геометрично послідовність $\{x_n\}$ зображають точками площини Oxy з координатами $(n; x_n)$ (рис. 4.1) або точками числової осі з координатами (x_n) (рис. 4.2).

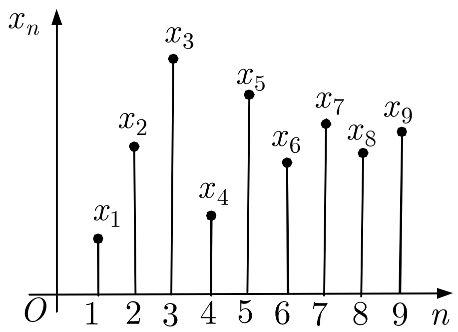

Рис. 4.1

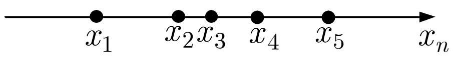

Рис. 4.2

4.1.2. Границя послідовності

Означення 4.2. Точку a (скінченну або нескінченно віддалену) числової прямої звуть *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ такий, що всі члени послідовності з номерами $n > N_\varepsilon$ потраплять в ε-окіл точки a.
Пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

або $x_n \to a, n \to \infty$, і кажуть, що «послідовність $\{x_n\}$ має границею точку a» або «послідовність $\{x_n\}$ збігається до a».

Числову послідовність, що має скінченну границю a, звуть *збіжною до числа* a і *розбіжною*, якщо вона не має скінченної границі.

Символічний запис означення 4.2 для різних випадків точки a див. у *п. 4.5.1.1—7.*

У разі скінченної границі, означення границі можна переформулювати так:

Означення 4.3. Число a звуть *границею числової послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε, існує номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ такий, що для всіх номерів

$$n > N_\varepsilon$$

виконано нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a, якщо поза будь-яким ε-околом точки a міститься скінченна кількість членів цієї послідовності (рис. 4.3).

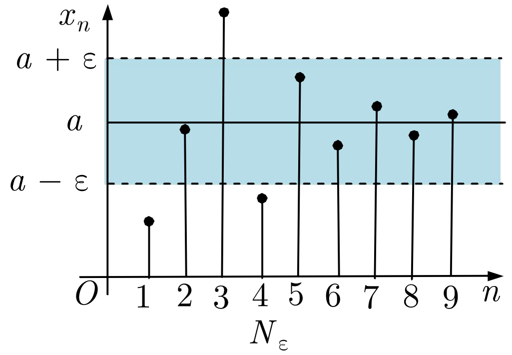

Рис. 4.3

Приклад.

Доведімо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ (рис. 4.4).

Справді, оскільки

$$\forall\varepsilon>0\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

якщо $n>N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа x, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

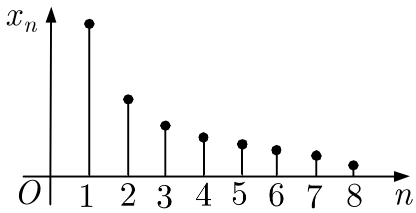

Рис. 4.4

Вправа 4.1.

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0, \alpha>0.$

Розв'язання вправи 4.1 дивись у *п. 4.5.2.*

Вправа 4.2.

Показати, що число $a=\dfrac{2}{5}$ не є границею послідовності $x_n=\dfrac{3n+1}{5n-1}$.

Розв'язання вправи 4.2 див. у *п. 4.5.3.*

4.1.3. Властивості збіжних послідовностей

Послідовність $\{x_n\}$ звуть *обмеженою*, якщо існує таке додатне число M, що для всіх номерів n правдива нерівність

$$|x_n|\le M.$$

Послідовність, що не є обмеженою, звуть *необмеженою*.

Властивості.

1. Збіжна послідовність має єдину границю.

2. Збіжна послідовність обмежена.

3. Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ та

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і, починаючи з деякого номера, $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

4. ***Теорема про три послідовності***. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

і, починаючи з деякого номера, виконано нерівність

$$x_n \le y_n \le z_n,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

►1. Припустімо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі a і b, $a \ne b$. На підставі властивості відокремлюваності дійсних чисел (теорема 2.1) існують неперетинні околи $U_\varepsilon(a)$ і $U_\varepsilon(b)$ (рис. 4.5). Оскільки послідовність $\{x_n\}$ збігається до a, то поза околом $U_\varepsilon(a)$, зокрема, в околі $U_\varepsilon(b)$ може лежати лише скінченна кількість точок з послідовності $\{x_n\}$. Тому число b і не може бути границею послідовності $\{x_n\}$.

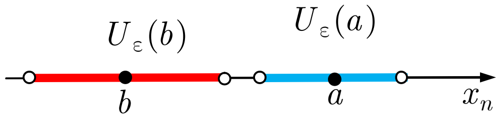

Рис. 4.5

2. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n| - |a| \le |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n| < |a| + \varepsilon.$$

Узявши

$$c = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a| + \varepsilon\},$$

дістанемо

$$|x_n| \le c\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Припустімо, що $a > b$. Відокремимо a та b неперетинними ε-околами (рис. 4.6). Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для всіх n, більших за деякий N_1, члени $\{x_n\}$ потраплять у вибраний окіл $U_\varepsilon(a)$.

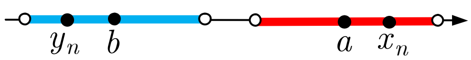

Рис. 4.6

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то для всіх номерів n, більших за деякий N_2, члени $\{y_n\}$ потраплять у вибраний окіл $U_\varepsilon(b)$.

Тоді для всіх номерів

$$n > N = \max\{N_1, N_2\}$$

буде виконано нерівність $x_n > y_n$, що суперечить припущенню.

4. Розгляньмо довільний ε-окіл точки a. З умови $\lim x_n = a$ та $\lim z_n = a$ випливає, що після деякого номера N_ε члени послідовностей $\{x_n\}$ та $\{z_n\}$ потраплять у цей ε-окіл. З нерівності ж випливає, що й $y_n \in U_\varepsilon(a)$ для $n > N_\varepsilon$ (рис. 4.7).◄

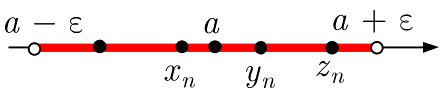

Рис. 4.7

Про підпослідовності див. у *п. 4.5.4.*

4.2. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

4.2.1. Означення нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей

Означення 4.4. Послідовність $\{x_n\}$ звуть *нескінченно малою* (н. м. п.), якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Приміром, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}, \{q^n\} (|q| < 1)$ — нескінченно малі послідовності.

Означення 4.5. Послідовність $\{x_n\}$ звуть *нескінченно великою* (н. в. п.), якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

або

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

або

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Зауваження 4.1. Будь-яка н. в. п. необмежена, але не всі необмежені послідовності є нескінченно великими.
Приміром,

$$\{n(1+(-1)^n)\} = 0, 4, 0, 8, 0, 12, \ldots$$

— необмежена послідовність, але не є н. в. п.

4.2.2. Властивості нескінченно малих і нескінченно великих послідовностей

Означення 4.6. *Сумою*, *різницею*, *добутком* і *часткою* двох послідовностей $\{x_n\}, \{y_n\}$ звуть послідовності $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}, \{x_n y_n\}, \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ відповідно (при діленні припускають, що $y_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$).

Властивості.

1. Сума скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є н. м. п.

2. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу послідовність є н. м. п.

3. Добуток скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є н. м. п.

4. Якщо $\{x_n\}$ — нескінченно велика послідовність, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — нескінченно мала послідовність. Якщо $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність і $\alpha_n \neq 0 \; \forall n$, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — нескінченно велика послідовність.

Доведення властивостей див. у *п. 4.5.5.*

Теорема 4.1 (***про зв'язок збіжної послідовності з її границею і н. м. п.***). Числова послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа a тоді й лише тоді, коли

$$x_n = a + \alpha_n,$$

де α_n — н. м. п.

► $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Позначивши $x_n - a = \alpha_n$, одержимо згідно з означенням границі послідовності, що $\{\alpha_n\}$ — н. м. п.

$\boxed{\Leftarrow}$ Якщо $x_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ — н. м. п., то

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\alpha_n\right| = \left|x_n - a\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a. ◄$$

Приклад. Для послідовності $\{x_n\}$ із загальним членом $x_n = \dfrac{4n+2}{2n+5}$, яка збігається до 2, правдиве зображення

$$x_n = 2 - \frac{8}{2n+5}.$$

де послідовність $\left\{-\dfrac{8}{2n+5}\right\}$ — нескінченно мала.

Зауваження 4.2. Оскільки $n^\alpha = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n^\alpha}}$, то із властивості 4 і твердження *вправи 4.1* випливає, що послідовність $\{n^\alpha\}, \alpha > 0,$ — нескінченно велика, тобто

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \infty, \alpha > 0.$$

4.3. Знаходження границь послідовностей

4.3.1. Арифметичні дії над збіжними послідовностями

Теорема 4.2. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збігаються і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Ca, C = \text{const}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}, b \ne 0.$

5) Якщо $\{x_n\} = \{c\}$ — стала послідовність, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

►Твердження 1)—4) доводять одноманітно. Доведімо, приміром, твердження 3).

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то правдиві зображення:

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n,$$

де $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — н. м. п. Тоді

$$|x_n y_n - ab| = |(a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab| = |b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n|.$$

Послідовності $\{b\alpha_n\}$ та $\{a\beta_n\}$ — н. м. п. як добуток обмеженої послідовності на н. м. п. (властивість 2 *п. 4.2.2*); $\{\alpha_n\beta_n\}$ — н. м. п. як добуток двох н. м. п. (властивість 3 *п. 4.2.2*); а послідовність

$$\{b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$$

н. м. п. як сума н. м. п. (властивість 1 *п. 4.2.2*). Отже, за властивістю 5 *п. 4.2.2*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$$

Доведімо тепер твердження 5). Справді,

$$\left|x_n - c\right| = \left|c - c\right| = 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0.◄$$

Приміром,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = 1 + 0 - 0 = 1.$$

4.3.2. Невизначеності

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$ звуть *невизначеністю* вигляду $\dfrac{0}{0}$.
Так само означують невизначеності вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty$.

Для обчислення таких границь теорема 4.2 незастосовна. Обчислення границь для невизначеностей вигляду $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty$ звуть *розкриттям відповідних невизначеностей*, яке полягає в перетворенні загального члена послідовності.

Приклад.

Знайдімо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{5n-3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{5n-3} = \left[\begin{array}{c}\text{чисельник і знаменник є н.в.п.,}\\ \text{що позначають } \frac{\infty}{\infty}\end{array}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{5-\frac{3}{n}} \overset{\text{T.4.2}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)} \overset{\text{T.4.2}}{=}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}.$$

Вправа 4.3.

Довести, що:

1) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1,\\ 1, & q=1,\\ \text{не існує}, & q=-1,\\ \infty, & |q|>1;\end{cases}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, a>0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

Розв'язання вправи 4.3 див. у *п. 4.5.6.*

Вправа 4.4.

Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_l(n)}{Q_m(n)}=\begin{cases}0, & l<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & l=m,\\ \infty, & l>m,\end{cases}$$

де

$$P_l(n)=a_0n^l+a_1n^{l-1}+\ldots+a_l,$$

$$Q_m(n)=b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m.$$

Розв'язання вправи 4.4 див. у *п. 4.5.7.*

4.4. Монотонні послідовності. Число e

4.4.1. Ознаки збіжності послідовності

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ є числовою функцією, то на неї можна перенести означення зростаючої, спадної, незростаючої і неспадної функції:

1) послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо $x_{n+1}>x_n\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ (\{x_n\}\nearrow)$;

2) послідовність $\{x_n\}$ не спадає, якщо $x_{n+1}\geq x_n\ \forall n\in\mathbb{N}$;

3) послідовність $\{x_n\}$ спадає, якщо $x_{n+1}<x_n\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ (\{x_n\}\searrow)$;

4) послідовність $\{x_n\}$ не зростає, якщо $x_{n+1}\leq x_n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Переформулюємо властивість 3 збіжних послідовностей у

Твердження 4.1 ***(необхідна умова збіжності послідовності).*** Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.

Зауваження 4.3. 1. Для довільної збіжної послідовності обмеженість є лише необхідною умовою збіжності, але не достатньою. Приміром, послідовність $\{(-1)^n\}$ — обмежена і розбіжна.
2. Неспадна послідовність завжди обмежена знизу першим членом, а незростаюча послідовність обмежена зверху першим членом.

Виявляється, що для монотонних послідовностей їхня обмеженість є вже й достатньою умовою збіжності.

Теорема 4.3 ***(ознака Ваєрштраса).*** Якщо монотонна послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то вона збігається. При цьому, якщо $\{x_n\}$ неспадна (незростаюча) послідовність, то

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}\ \left(\lim_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}\right).$$

Доведення теореми 4.3 див. у *п. 4.5.8.*

Зауваження 4.4. Монотонність є достатньою ознакою збіжності обмеженої послідовності, але не є необхідною.

Приміром, немонотонна послідовність

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

збігається до нуля.

Наслідок. ***(критерій збіжності монотонної послідовності).*** Монотонна послідовність $\{x_n\}$ збігається тоді й лише тоді, коли вона обмежена.

4.4.2. Число e

Розгляньмо послідовність $\{x_n\}$ із загальним членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Доведімо, що послідовність $\{x_n\}$ збігається.

►Для доведення скористаємося нерівністю Я. Бернуллі

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n, \alpha > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Покладаючи $\alpha = \dfrac{1}{n}$, дістанемо

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

тобто послідовність $\{x_n\}$ обмежена знизу. Розгляньмо послідовність $\{y_n\}$ із загальним членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Маємо

$$\forall n : y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n > 2.$$

Покажімо, що послідовність $\{y_n\}$ спадає. Справді, для $n \geq 2$ матимемо

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1}.$$

Оскільки

$$\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

то

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow y_{n-1} > y_n.$$

Тобто послідовність $\{y_n\}$ спадає і $y_n > 2$. Тоді існує

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\cdot 1.$$

Границю послідовності $\{x_n\}$, йдучи за Ейлером, позначають

$$e \overset{\text{den}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Число e ірраціональне, $e \approx 2,7182818\ldots$ З певних міркувань число e зручно вибрати як основу для системи логарифмів. Логарифм дійсного числа $x > 0$ за основою e звуть *натуральним* і позначають

$$\ln x \overset{\text{den}}{=} \log_e x.$$

Границя, що означує число e, є прикладом ще однієї невизначеності — невизначеності вигляду 1^{∞}. Окрім неї ще можливі невизначеності вигляду 0^0 і ∞^0.

4.5. Додаткові відомості

4.5.1. Символічний запис означень

1. $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_n - a\right| < \varepsilon.$
3. $\{x_n\}$ обмежена $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|x_n\right| \le M.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_n\right| < \varepsilon.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_n\right| > \varepsilon.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon.$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow x_n < -\varepsilon.$
8. $\{x_n\}$ зростає на $\mathbb{N} \Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} < x_{n_2}$ $(\{x_n\} \nearrow)$.
9. $\{x_n\}$ не спадає на $\mathbb{N} \Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} \le x_{n_2}$.
10. $\{x_n\}$ спадає на $\mathbb{N} \Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}$ $(\{x_n\} \searrow)$.
11. $\{x_n\}$ не зростає на $\mathbb{N} \Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} \ge x_{n_2}$.

4.5.2. Розв'язання вправи 4.1

Справді, оскільки

$$\forall\varepsilon > 0 \left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon,$$

коли $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа x, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0, \alpha > 0.$$

4.5.3. Розв'язання вправи 4.2

Використовуючи правило побудови заперечень, сформулюймо заперечення того, що $x_n \to a, n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ne a \Leftrightarrow \exists\varepsilon^* > 0 \ \forall N : \exists n^* > N \Rightarrow |x_{n^*} - a| \geq \varepsilon.$$

Справді,

$$|x_n - a| = \left|\frac{3n+1}{5n-1} - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{5}\frac{5n+7}{5n-1}.$$

Оскільки

$$\frac{5n+7}{5n-1} > 1 \ \forall n,$$

то

$$\left|x_n - \frac{2}{5}\right| > \frac{1}{5} \ \ \forall n.$$

Отже, число $\dfrac{2}{5}$ не є границею послідовності $\{x_n\}$.

4.5.4. Підпослідовності

Якщо з деякої нескінченної підмножини членів заданої послідовності $\{x_n\}$ утворено нову послідовність, з тим самим порядком членів, то цю нову послідовність звуть *підпослідовністю* заданої послідовності і позначають

$$\{x_{n_k}\}, k \in \mathbb{N}.$$

Твердження 4.2. Будь-яка підпослідовність збіжної послідовності збігається до тієї ж границі.

►Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до a, то поза будь-яким ε-околом точки a лежить скінченна кількість членів послідовності. Тобто, поза цим околом лежить і скінченна кількість членів будь-якої її підпослідовності. Це означає, що a є границею підпослідовності.◄

Зауваження 4.4. Із твердження 4.2 випливає наслідок: якщо з послідовності $\{x_n\}$ можна вилучити дві підпослідовності, що збігаються до a та $b, a \ne b$, то послідовність $\{x_n\}$ не має границі.

Приміром, з послідовності $\{(-1)^n\}$ можна вилучити дві підпослідовності $\{1\} = 1, 1, 1, \ldots$ та $\{-1\} = -1, -1, -1, \ldots$, що збігаються до 1 та (-1) відповідно. У цьому разі послідовність $\{(-1)^n\}$ не має границі.

4.5.5. Доведення властивостей н. м. п. і н. в. п.

1. Доведімо властивість для двох н. м. п. $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$. Для заданого $\varepsilon > 0$ знайдуться такі номери N_1 та N_2, що

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1 \text{ і } |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_2.$$

Тоді при $n > N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ виконано обидві ці нерівності. Отже,

$$\forall n > N_0 \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — н. м. п. (скористались нерівністю трикутника).

2. Нехай $\{x_n\}$ — обмежена послідовність, а $\{\alpha_n\}$ — н. м. п. За означенням обмеженої послідовності

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|x_n\right| \le M.$$

Оскільки $\{\alpha_n\}$ — н. м. п., то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тоді

$$\left|x_n \alpha_n\right| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

4. Якщо $\{x_n\}$ — н. в. п., то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_n\right| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{\left|x_n\right|} < \varepsilon,$$

тобто $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — н. м. п.

Так само доводять і другу частину твердження.

4.5.6. Розв'язання вправи 4.3

1) Нехай $|q| < 1$. Тоді $\dfrac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, де $\alpha > 0$. На підставі нерівності Бернуллі

$$(1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha, n > 0, \alpha \ge -1$$

маємо

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha \Rightarrow 0 \le |q|^n \le \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\alpha + \frac{1}{n}} = 0 \cdot \frac{1}{\alpha} = 0,$$

то за теоремою про три послідовності (властивість 4 *п. 4.1.3*)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1.$$

За властивістю 4 *п. 4.2.2* маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(1/q)^n} = \infty$, де $|q| > 1$.

При $q=1$ послідовність $\{1\}=1,1,...1,...$ є сталою і збігається до 1.

Послідовність $\{(-1)^n\}=-1,1,-1,1,...$ не має границі, оскільки обох претендентів на границю — числа -1 та 1 можна оточити неперетинними околами, скажімо радіусом $\varepsilon=\frac{1}{2}$, за межами яких опиняється нескінченно багато членів послідовності.

2) Нехай $a\geq 1$. Тоді $\sqrt[n]{a}=1+x_n, x_n\geq 0$. З нерівності Бернуллі випливає, що

$$a=(1+x_n)^n\geq 1+nx_n.$$

Звідси, на підставі теореми про три послідовності маємо

$$0\leq x_n\leq\frac{a-1}{n}\Rightarrow 0\leq\lim_{n\to\infty}x_n\leq\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

Тобто

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1+0=1, a\geq 1.$$

Якщо $0<a<1$, то $\frac{1}{a}>1$. Звідси на підставі теореми 4.2 і щойно доведеного твердження маємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}}=1.$$

3) Зобразімо $\sqrt[n]{n}$ у вигляді

$$\sqrt[n]{n}=\Big(\sqrt{n}\sqrt{n}\underbrace{1\cdot...\cdot 1}_{n-2\text{ разів}}\Big)^{1/n}$$

Скориставшись нерівністю Коші (п. 1.3.4) $(x_1=\sqrt{n}, x_2=\sqrt{n}, x_3=...=x_n=1)$, маємо

$$1\leq\sqrt[n]{n}\leq\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}\right)=1$, то на підставі теореми про три послідовності дістаємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Знаходження цієї границі є прикладом розкриття невизначеності вигляду ∞^0.

4.5.7. Розв'язання вправи 4.4

Розгляньмо випадки:

1) якщо $l=m$, то ділячи чисельник і знаменник дробу на n^l, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_l(n)}{Q_l(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{n}+...+\dfrac{a_l}{n^l}}{b_0+\dfrac{b_1}{n}+...+\dfrac{b_l}{n^l}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{скористаємось теоремою 4.2}\\ \text{і тим, що } \dfrac{a_i}{n^i} \text{ та } \dfrac{b_i}{n^i},\ i = \overline{1,l}, \text{ −н.м.п.}\end{array}\right] = \frac{a_0}{b_0};$$

2) якщо $l > m$, то ділячи чисельник і знаменник дробу на n^l (на «найвищий степінь n»), дістаньмо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_l(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{n}+...+\dfrac{a_l}{n^l}}{\dfrac{b_0}{n^{l-m}}+\dfrac{b_1}{n^{l-m+1}}+...+\dfrac{b_m}{n^l}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{скористаємось теоремою 4.2,}\\ \dfrac{a_i}{n^i}, i=\overline{1,l},\ \dfrac{b_i}{n^{l-m+i}}, i=\overline{0,m}, \text{−н.м.п.}\\ \text{і зв'язком між н.в.п. і н.м.п.}\end{array}\right] = \infty,$$

оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_l}{n^l}\right) = a_0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_0}{n^{l-m}}+\frac{b_1}{n^{l-m+1}}+...+\frac{b_m}{n^l}\right) = 0.$$

3) якщо ж $m > l$, то ділячи чисельник і знаменник на n^m (на «найвищий степінь n»), дістаньмо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_l(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_0}{n^{m-l}}+\dfrac{a_1}{n^{m-l+1}}+...+\dfrac{a_l}{n^m}}{b_0+\dfrac{b_1}{n}+...+\dfrac{b_m}{n^m}} = 0,$$

оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{n^{m-l}}+\frac{a_1}{n^{m-l+1}}+...+\frac{a_l}{n^m}\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_0+\frac{b_1}{n}+...+\frac{b_m}{n^m}\right) = b_0.$$

4.5.8. Доведення теореми 4.3

Нехай для визначеності $\{x_n\}$ — неспадна обмежена послідовність і $a = \sup\{x_n\}$. За означенням точної верхньої межі множини $\{x_n\}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_N \in \{x_n\} : a - \varepsilon < x_N \le a,$$

а з того, що послідовність $\{x_n\}$ неспадна, випливає нерівність

$$a - \varepsilon < x_N \le x_{N+1} \le ... \le a < a + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$