Модуль 5. Елементарні функції

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 5.1—5.4) і розширеному (розділи 5.1—5.5).

У модулі:

— систематизовано і поглиблено шкільні знання про основні елементарні функції, а саме, зібрано основні формули, співвідношення і графіки елементарних функцій;

— запроваджено гіперболічні функції й обернені гіперболічні функції;

— виділено клас основних елементарних функцій і подано його класифікацію;

— розглянуто геометричні перетворення графіків функцій і поняття гармонічної функції;

— запропоновано 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

5.1. Основні числові функції

5.1.1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Розгляньмо найважливіші випадки.

1. Нехай $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}, y = x^{2n}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0; +\infty)$. Функція парна, спадає на проміжку $(-\infty; 0)$, зростає на проміжку $(0; +\infty)$. Графік — парабола порядку $2n$ (рис. 5.1).

2. Нехай $\alpha = 2n - 1, n \in \mathbb{N}, y = x^{2n-1}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна, зростає на $\mathbb{R}$. Графік — парабола порядку $2n - 1$ (пряма, коли $n = 1$) (рис. 5.2).

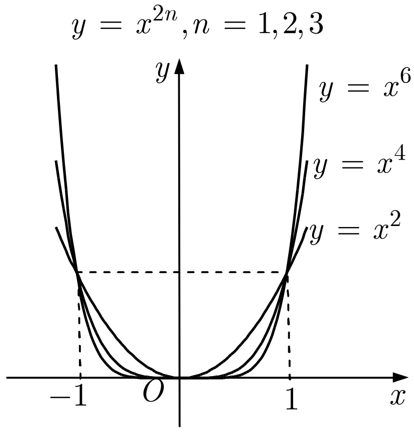


Рис. 5.1

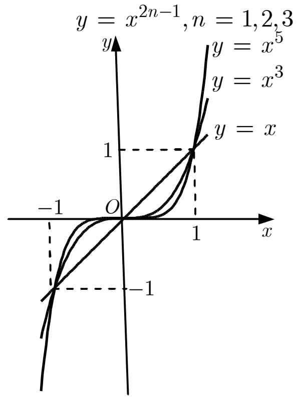


Рис. 5.2

3. Нехай $\alpha = -2n, n \in \mathbb{N}, y = \dfrac{1}{x^{2n}}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0; +\infty)$. Функція парна, зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$ (рис. 5.3).

4. Нехай $\alpha = -2n + 1, n \in \mathbb{N}, y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$. Тоді $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція непарна, спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (рис. 5.4).

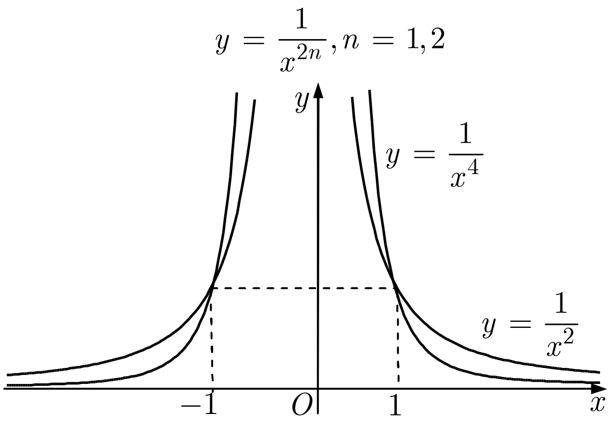


Рис. 5.3

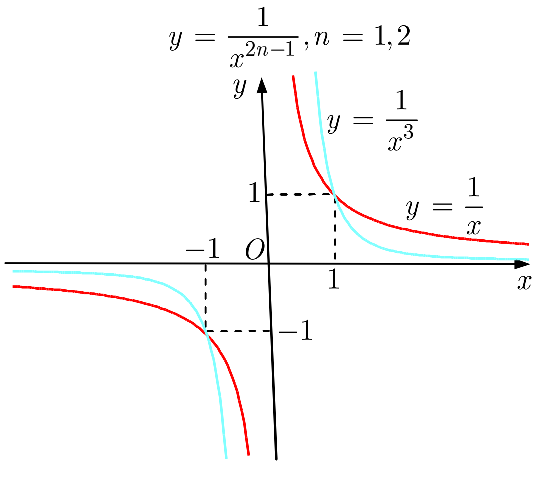


Рис. 5.4

5. Нехай $\alpha \in \mathbb{Q}, y = x^{\alpha}$. Тоді $D(f) = (0;+\infty), E(f) = (0;+\infty)$. Для деяких α множини $D(f)$ та $E(f)$ можуть бути ширшими.

Таблиця 5.1. Степенева функція

	x^{2n}	x^{2n-1}	x^{-2n}	x^{-2n-1}	$x^{\alpha}, \alpha > 0$	$x^{\alpha}, \alpha < 0$
$D(f)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
$E(f)$	$[0,+\infty)$	$\mathbb{R}$	$(0,+\infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
обмеженість	$y \ge 0$	–	$y > 0$	–	$y > 0$	$y > 0$
симетрія	парна	непарна	парна	непарна	загал. виду	загал. виду
монотонність	$\searrow (-\infty,0]$ $\nearrow [0,+\infty)$	$\nearrow \mathbb{R}$	$\nearrow (-\infty,0)$ $\searrow (0,+\infty)$	$\searrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\nearrow [0,+\infty)$	$\searrow (0,+\infty)$
перетин з осями	$y(0) = 0$	$y(0) = 0$	–	–	$y(0) = 0$	–

Степенева функція справджує функціональне рівняння

$$f(x)f(y) = f(xy).$$

Основні формули $(x, y > 0)$:

1) $x^0 = 1, x \neq 0$;

2) $x^a x^b = x^{a+b}$;

3) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$;

4) $(x^a)^b = x^{ab}$;

5) $(xy)^a = x^a y^a$;

6) $\dfrac{1}{x^{\alpha}} = x^{-\alpha}$;

7) $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

5.1.2. Показникова функція $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Область означення цієї функції $D(f) = \mathbb{R}$, а множина значень $E(f) = (0;+\infty)$. При $0 < a < 1$ функція спадає, при $a > 1$ — зростає (рис. 5.5).

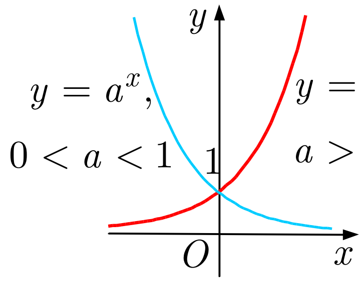


Рис. 5.5

Якщо $a = e$, то функцію $y = e^x$ звуть *експонентою* (позначають ще $y = \exp x$).

Показникова функція справджує функціональне рівняння

$$f(x)f(y) = f(x + y).$$

Основні формули:

1) $a^0 = 1$;

2) $a^x a^y = a^{x+y}$;

3) $a^x b^x = (ab)^x$; 4) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

5.1.3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Ця функція обернена до показникової. Область її означення $D(f) = (0;+\infty)$, множина значень $E(f) = \mathbb{R}$. При $0 < a < 1$ функція спадає, при $a > 1$ — зростає (рис. 5.6).

Якщо $a = e$, то логарифмічну функцію позначають $y = \ln x$; якщо $a = 10$, то позначають $y = \lg x$.

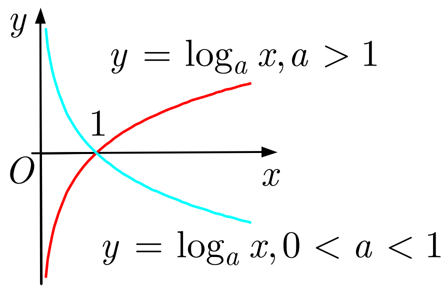


Рис. 5.6

Таблиця 5.2. Показникова і логарифмічна функції

	$a^x, a > 1$	$a^x, a < 1$	$\log_a x, a > 1$	$\log_a x, a < 1$
$D(f)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$
$E(f)$	$(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
обмеженість	$y > 0$	$y > 0$	–	–
симетрія	загал. виду	загал. виду	загал. виду	загал. виду
монотонність	$\nearrow \mathbb{R}$	$\searrow \mathbb{R}$	$\nearrow (0;+\infty)$	$\searrow (0;+\infty)$
перетин з осями	$y(0) = 1$	$y(0) = 1$	$y(1) = 0$	$y(1) = 0$

Логарифмічна функція справджує функціональне рівняння

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

Основні формули:

1) $\log_a 1 = 0$; 2) $\log_a a = 1$;

3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; 4) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

5) $\log_{a^r} x^p = \dfrac{p}{r}\log_a x$. 6) $\log_a a^x = x$; $a^{\log_a x} = x, x > 0$.

Загальну степеневу функцію можна виразити через показникову і логарифмічну формулою

$$x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}, x > 0.$$

5.1.4. Тригонометричні функції $y = \cos x, y = \sin x,\ y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$

1. Функція $y = \sin x, D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Вона непарна, періодична з періодом $T = 2\pi$. Функція зростає на проміжках $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, спадає на проміжках $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$. Графік — синусоїда (рис. 5.7).

2. Функція $y = \cos x, D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Вона парна, періодична з періодом $T = 2\pi$. Функція зростає на проміжках $[2\pi k - \pi; 2\pi k]$, спадає на проміжках $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$. Графік — косинусоїда (див. рис. 5.7).

3. Функція $y = \operatorname{tg} x; D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Функція непарна, періодична. Період $T = \pi$. Функція зростає на $D(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$. Графік — тангенсоїда (рис. 5.8).

4. Функція $y = \operatorname{ctg} x; D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Функція непарна, періодична. Період $T = \pi$. Функція спадає на $D(f) = (\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$. Графік — котангенсоїда (рис. 5.8).

До тригонометричних належать також рідше використовувані функції

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

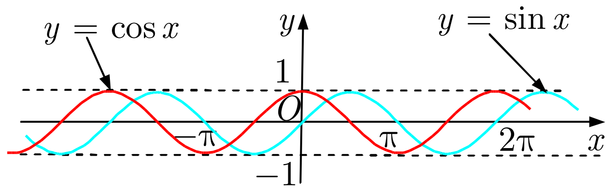


Рис. 5.7

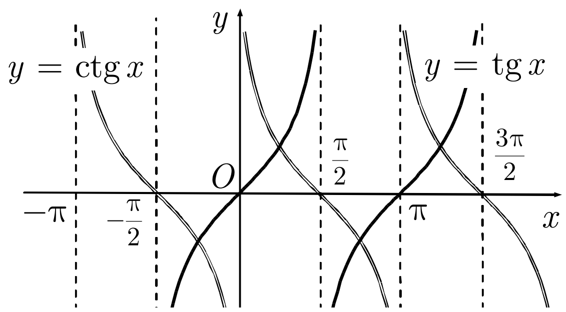


Рис. 5.8

Таблиця 5.3. Тригонометричні функції

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$D(f)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$
$E(f)$	$[-1;1]$	$[-1;1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
симетрія	непарна	парна	непарна	непарна
обмеженість	$\lvert y\rvert \le 1$	$\lvert y\rvert \le 1$	–	–
періодичність	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$	$T = \pi$
монотонність	$\nearrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \searrow \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$	$\nearrow [\pi; 2\pi], \searrow [0;\pi]$	$\nearrow D(y)$	$\searrow D(y)$
перетин з осями	$y(\pi k) = 0$	$y\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ $y(0) = 1$	$y(\pi k) = 0$	$y\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$

Основні формули:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

2) $\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x, \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x, \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \end{cases}$ 4) $\begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} x = \dfrac{1 \mp \cos 2x}{2};$

5) $\begin{cases} 2\sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \\ 2\cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \\ 2\sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y); \end{cases}$

6) $\begin{cases} |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \dfrac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \\ |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}, \\ \cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x, \\ \cos(-x) = \cos x; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sin(x + 2\pi n) = \sin x, \\ \cos(x + 2\pi n) = \cos x; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x, \end{cases} n \in \mathbb{Z};$

12) $\begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \pm \begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix};$ 13) $\begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix}(x + \pi) = -\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix};$

14) $\begin{Bmatrix} \operatorname{tg} \\ \operatorname{ctg} \end{Bmatrix}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\begin{Bmatrix} \operatorname{ctg} x \\ \operatorname{tg} x \end{Bmatrix};$ 15) $\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \cos \pi n = (-1)^n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \sin \pi n = 0. \end{cases}$

Таблиця 5.4. «Стандартні» значення тригонометричних функцій

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	0
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	–

5.1.5. Обернені тригонометричні функції

Функції $y = \arcsin x, y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$ означають як функції обернені до відповідних тригонометричних функцій.

1. Функція $y = \arcsin x$ (рис. 5.9): $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Вона непарна, зростає на $D(f)$.

2. Функція $y = \arccos x$ (див. рис. 5.9): $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = [0;\pi]$. Вона спадає на $D(f)$.

3. Функція $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5.10): $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y; D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Вона непарна, зростає на $D(f)$.

4. Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ (див. рис. 5.10): $y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$; $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0;\pi)$. Вона спадає на $D(f)$.

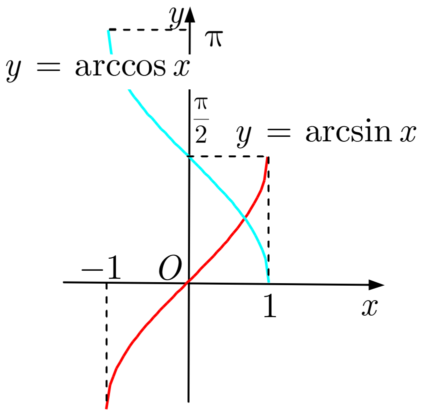


Рис. 5.9

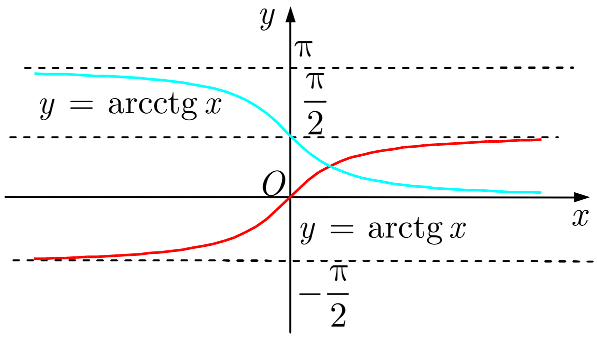


Рис. 5.10

Таблиця 5.5. Обернені тригонометричні функції

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arctg} x$
$D(f)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$E(f)$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
обмеженість	$\lvert y\rvert \le \frac{\pi}{2}$	$\lvert y\rvert \le \pi$	$\lvert y\rvert < \frac{\pi}{2}$	$\lvert y\rvert < \pi$
симетрія	непарна	загал. виду	непарна	загал. виду
монотонність	$\nearrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$\searrow [0;\pi]$	$\nearrow \mathbb{R}$	$\searrow \mathbb{R}$
перетин з осями	$y(0) = 0$	$y(0) = \frac{\pi}{2}$	$y(0) = 0$	$y(0) = \frac{\pi}{2}$

Таблиця 5.6. Значення тригонометричних функцій від обернених тригонометричних функцій

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin	x $(\lvert x\rvert \le 1)$	$\sqrt{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert \le 1)$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert \le 1)$	x $(\lvert x\rvert \le 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0 < \lvert x\rvert \le 1)$	x	$\dfrac{1}{x}$ $(x \ne 0)$
ctg	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0 < \lvert x\rvert \le 1)$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{x}$ $(x \ne 0)$	x

Основні формули:

1) $\begin{cases} \arcsin x + \arccos = \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \arcsin x + \arcsin(-x) = 0, \\ \arccos x + \arccos(-x) = \pi; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = 0, \\ \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi. \end{cases}$

Таблиця 5.7. «Стандартні» значення обернених тригонометричних функцій

	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	0

	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

Можна розглянути й обернені тригонометричні функції від тригонометричних функцій. Приміром, $y = \arcsin(\sin x)$ (рис. 5.11), $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ (рис. 5.12).

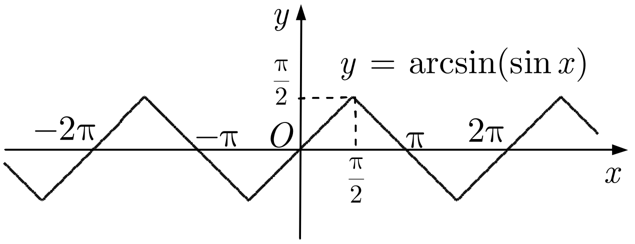


Рис. 5.11

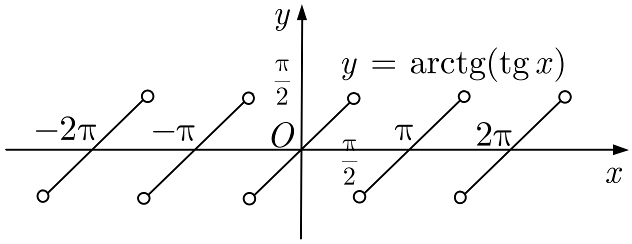


Рис. 5.12

5.1.6. Гіперболічні функції $y = \mathrm{sh}\, x, y = \mathrm{ch}\, x, y = \mathrm{th}\, x, y = \mathrm{cth}\, x$

1. Функція $y = \mathrm{sh}\, x \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*гіперболічний синус*); $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$. Вона непарна, зростає на $\mathbb{R}, \mathrm{sh}\, 0 = 0$ (рис. 5.13).

2. Функція $y = \mathrm{ch}\, x \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*гіперболічний косинус*); $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [1;+\infty)$. Вона парна, спадає на проміжку $(-\infty;0]$, зростає на $[0;+\infty), \mathrm{ch}\, 0 = 1$ (див. рис. 5.13).

3. Функція $y = \mathrm{th}\, x \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (*гіперболічний тангенс*); $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (-1;1)$. Вона непарна, зростає на $\mathbb{R}, \mathrm{th}\, 0 = 0$ (рис. 5.14).

4. Функція $y = \mathrm{cth}\, x \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (*гіперболічний котангенс*); $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$. Вона непарна, спадає на проміжках $(-\infty;0)$ та $(0;+\infty)$ (див. рис. 5.14).

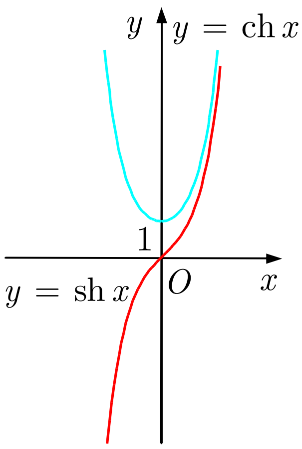


Рис. 5.13

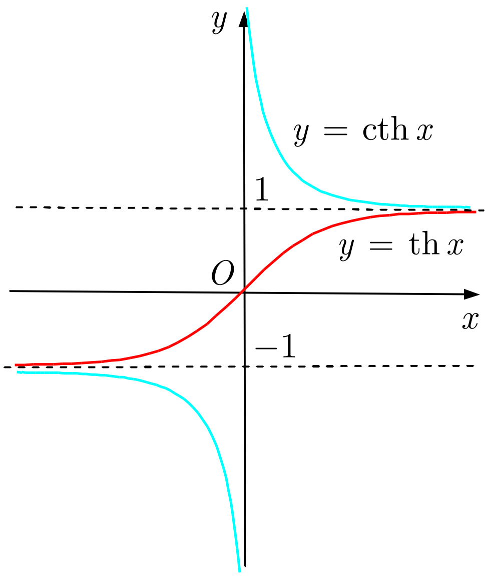


Рис. 5.14

Співвідношення для гіперболічних функцій схожі на співвідношення для тригонометричних функцій.

Основні формули:

1) $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$;

2) $\begin{cases} \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \end{cases}$

Вправа 5.1.

Показати, що:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

2) $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x.$

Розв'язання вправи 5.1 дивись у *п. 5.5.1.*

5.1.7. Обернені гіперболічні функції

Функції $y = \operatorname{arsh} x, y = \operatorname{arch} x, y = \operatorname{arth} x,\ y = \operatorname{arcth} x$ означують як обернені до відповідних гіперболічних функцій.

1. Функція $y = \operatorname{arsh} x$ (*ареа-синус*); $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$ (рис. 5.15).

$$y = \operatorname{arsh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sh} y \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Функція непарна, зростає на $D(f)$.

2. Функція $y = \operatorname{arch} x$ (*ареа-косинус*); $D(f) = [1;+\infty), E(f) = [0;+\infty)$ (див. рис. 5.15);

$$y = \operatorname{arch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Функція зростає на $D(f)$.

3. Функція $y = \operatorname{arth} x$ (*ареа-тангенс*); $D(f) = (-1;1), E(f) = \mathbb{R}$ (рис. 5.16);

$$y = \operatorname{arth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{th} y \Rightarrow \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Функція непарна, зростає на $D(f)$.

4. Функція $y = \operatorname{arcth} x$ (*ареа-котангенс*); $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (див. рис. 5.16);

$$y = \operatorname{arcth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cth} y \Rightarrow \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Вона непарна, спадає на проміжках $(-\infty;-1), (1;+\infty)$.

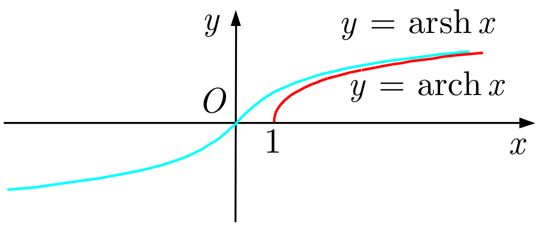


Рис. 5.15

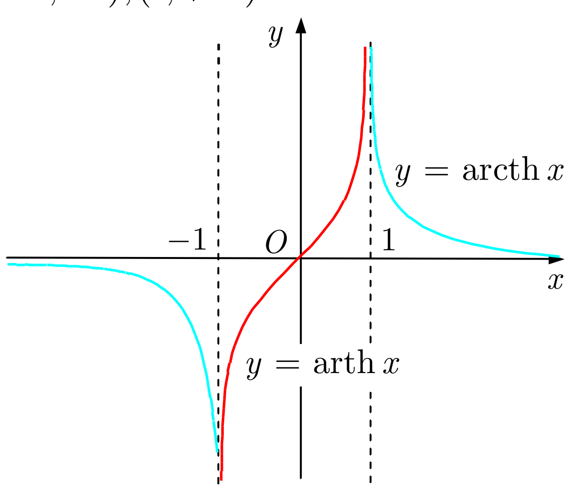


Рис. 5.16

Вправа 5.2. Показати, що $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Розв'язання вправи 5.2 див. у. *п. 5.5.2.*

5.2. Класифікація функцій

Означення 5.1. Функції: степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні й обернені тригонометричні, звуть *основними елементарними функціями*. Всі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також їхні суперпозиції, утворюють *клас елементарних функцій.*

Приміром, елементарними функціями є: $f(x) = |x|$, $f(x) = \log_a^3 \arcsin 2^{\sqrt{x}}$, гіперболічні функції й обернені гіперболічні функції.

Використовують таку класифікацію елементарних функцій:

1. Функцію вигляду

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0,n}$, звуть *цілою раціональною функцією* або многочленом степеня n. Многочлен 1-го степеня звуть також *лінійною функцією*.

А. Лінійна функція $y = ax + b \ (a, b \in \mathbb{R})$. Область означення $D(f) = \mathbb{R}$, а множина значень

$$E(f) = \begin{cases} \mathbb{R}, & a \neq 0, \\ \{b\}, & a = 0. \end{cases}$$

Лінійна функція зростає при $a > 0$, спадає при $a < 0$.

Графік функції — пряма лінія з кутовим коефіцієнтом $k = a = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 5.17).

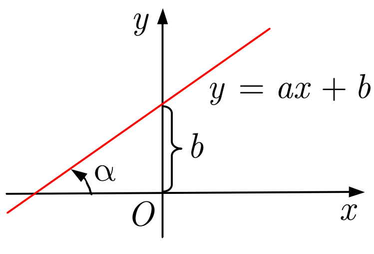


Рис. 5.17

Б. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c \ (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

1) Якщо $a > 0$. Тоді, $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \left[c - \dfrac{b^2}{4a}; +\infty\right)$. Функція спадає на проміжку $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$, зростає на проміжку $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$. Графік функції — парабола з віссю $x = -\dfrac{b}{2a}$, вершиною в точці $M\left(-\dfrac{b}{2a}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ і гілками, спрямованими догори (рис. 5.18).

2) Якщо $a < 0$. Тоді, $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \left(-\infty; c - \dfrac{b^2}{4a}\right]$. Функція зростає на проміжку $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, спадає на проміжку $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$. Графік функції — парабола з віссю $x = -\dfrac{b}{2a}$, вершиною в точці $M\left(-\dfrac{b}{2a}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ і гілками, спрямованими донизу (див. рис. 5.18).

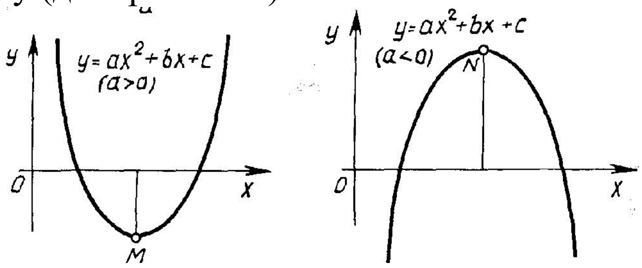


Рис. 5.18

2. Функцію, що являє собою відношення двох цілих раціональних функцій

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n},$$

звуть *дробово-раціональною функцією*.

Цілі раціональні і дробово-раціональні утворюють *клас раціональних функцій*.

Окремим випадком дробово-раціональної функції є дробово-лінійна функція $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0)$. Область означення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; множина значень $E(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$.

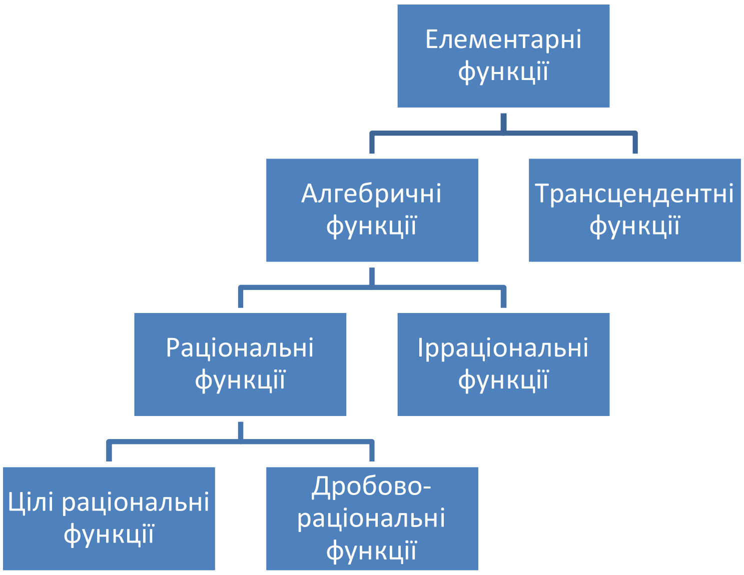
3. Функцію, одержану скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над степеневими функціями як з цілими, так і із дробовими показниками, яка не є раціональною, звуть *ірраціональною*.

Приміром, функції $f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+5}{3x^3-8}}, f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ є ірраціональними.

Раціональні й ірраціональні функції утворюють *клас алгебричних функцій*.

4. Будь-яку функцію, що не є алгебричною, звуть *трансцендентною*. До трансцендентних належать усі елементарні функції, окрім степеневої функції з раціональними показниками, а також гіперболічні й обернені гіперболічні функції.

Розглянуту класифікацію елементарних функцій демонструє схема:



Неелементарними функції є, приміром: $f(x) = \left|x\right|$, функція знак числа $f(x) = \operatorname{sgn} x$ або функція Гевісайда $f(x) = \eta(x)$ (див. *п. 3.1.3*).

5.3. Геометричні перетворення графіків функцій

Графіки багатьох елементарних функцій можна одержати із графіків основних елементарних функцій за допомогою елементарних перетворень.

Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий — Γ.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістають з Γ паралельним перенесенням уздовж осі Oy на b (рис. 5.19).

2. Графік функції $y = f(x - a)$ дістають з Γ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на a (див. рис. 5.20).

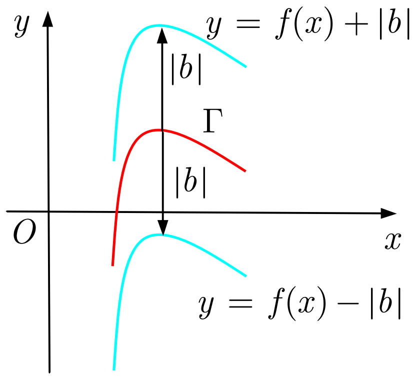


Рис. 5.19

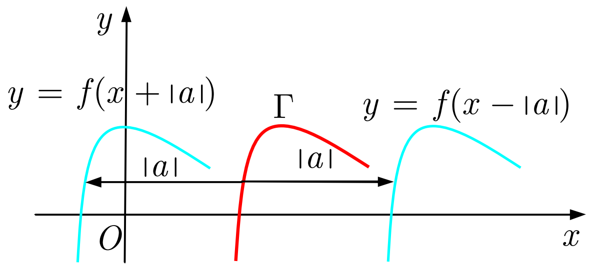


Рис. 5.20

3. Графік функції $y = cf(x), c > 0$, дістають з Γ «розтягуванням» у c разів уздовж осі Oy (абсциси його точок не міняють) (рис. 5.21).

4. Графік функції $y = f(kx), k > 0$, дістають з Γ «стисканням» у k разів уздовж осі Ox (ординати його точок не міняють) (рис. 5.22).

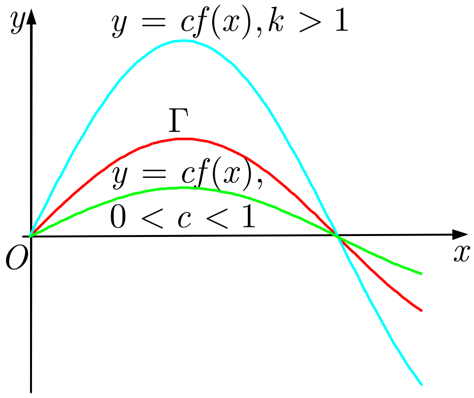


Рис. 5.21

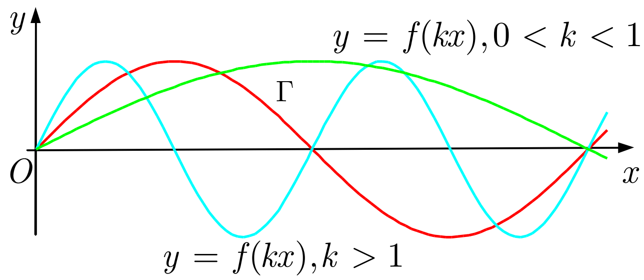


Рис. 5.22

5. Графіки функції $y = f(-x)$ та $y = -f(x)$ дістають з Γ дзеркальним відбиттям щодо осей Oy та Ox відповідно (рис. 5.23 та 5.24 відповідно).

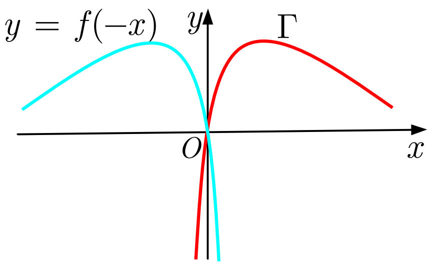


Рис. 5.23

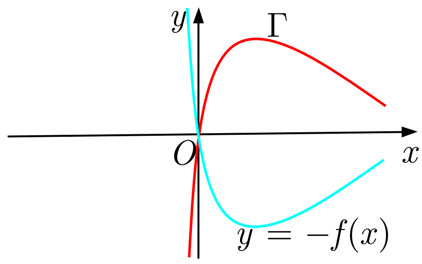


Рис. 5.24

6. Графік функції $y = f\left(\left|x\right|\right)$ будують так: ту частина Γ, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), не міняють і відображають її симетрично щодо осі Oy.

7. Графік функції $y = \left|f(x)\right|$ будують так: ту частину Γ, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі) не міняють, а частину, яка лежить нижче осі Ox, відображують симетрично щодо цієї осі.

Вправа 5.3. Побудувати за допомогою геометричних перетворень графік дробово-лінійної функції $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Розв'язання вправи 5.3 див. у *п. 5.5.3.*

5.4. Гармонічна залежність

У застосуваннях синусоїдальна, «гармонічна», залежність з'являється у вигляді

$$y = M\sin(\omega t + \alpha),$$

де незалежна змінна t — час, сталу $M > 0$ звуть *амплітудою*, $\omega > 0$ *частотою* (коловою), суму $\omega t + \alpha$ — *фазою*, сталу α — *початковою фазою*.

З'ясуймо вплив параметрів на графік синусоїди $y = \sin x$. Амплітуда M «збільшує» розмах синусоїди $y = \sin x$ від $-M$ до M; частота ω міняє період з 2π на $\dfrac{2\pi}{\omega}$; наявність початкової фази зміщує синусоїду ліворуч на $\dfrac{\alpha}{\omega}$ (рис. 5.25), оскільки

$$\omega t + \alpha = \omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right).$$

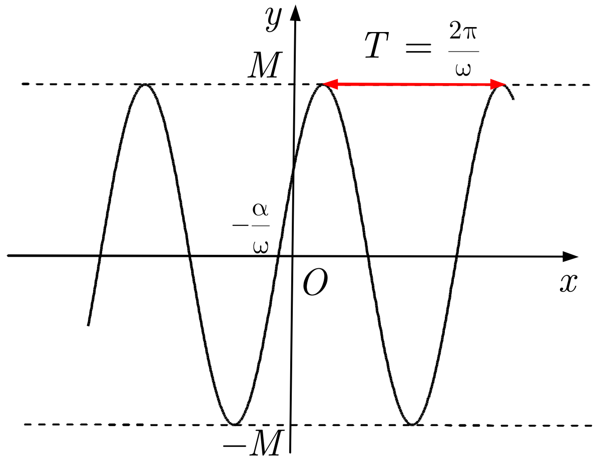


Рис. 5.25

Враховуючи, що

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t =$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2}\left(\sin\omega t\,\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\omega t\right) =$$
$$= M\sin(\omega t + \alpha),$$

то

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = M\sin(\omega t + \alpha),$$

де $M = \sqrt{A^2 + B^2}$; α визначають із системи

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \sin\alpha = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{cases}$$

5.5. Розв'язання вправ

5.5.1. Розв'язання вправи 5.1

Справді,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1;$$
$$2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

5.5.2. Розв'язання вправи 5.2

Справді, з означення гіперболічного синуса

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

$$t^2 - 2xt - 1 = 0 \ \ (e^t = t) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

5.5.3. Розв'язання вправи 5.3

Перетворімо вираз дробово-лінійної функції

$$y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = 3 + \frac{2}{x-1}.$$

Отже, графік заданої функції дістанемо із графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$ розтягом у 2 рази вздовж осі Oy, перенесенням на 1 в напрямі осі Ox і на 3 в напрямі осі Oy (рис. 5.26):

$$y = \frac{1}{x} \to y = \frac{2}{x} \to y = \frac{2}{x-1} \to y = 3 + \frac{2}{x-1}.$$

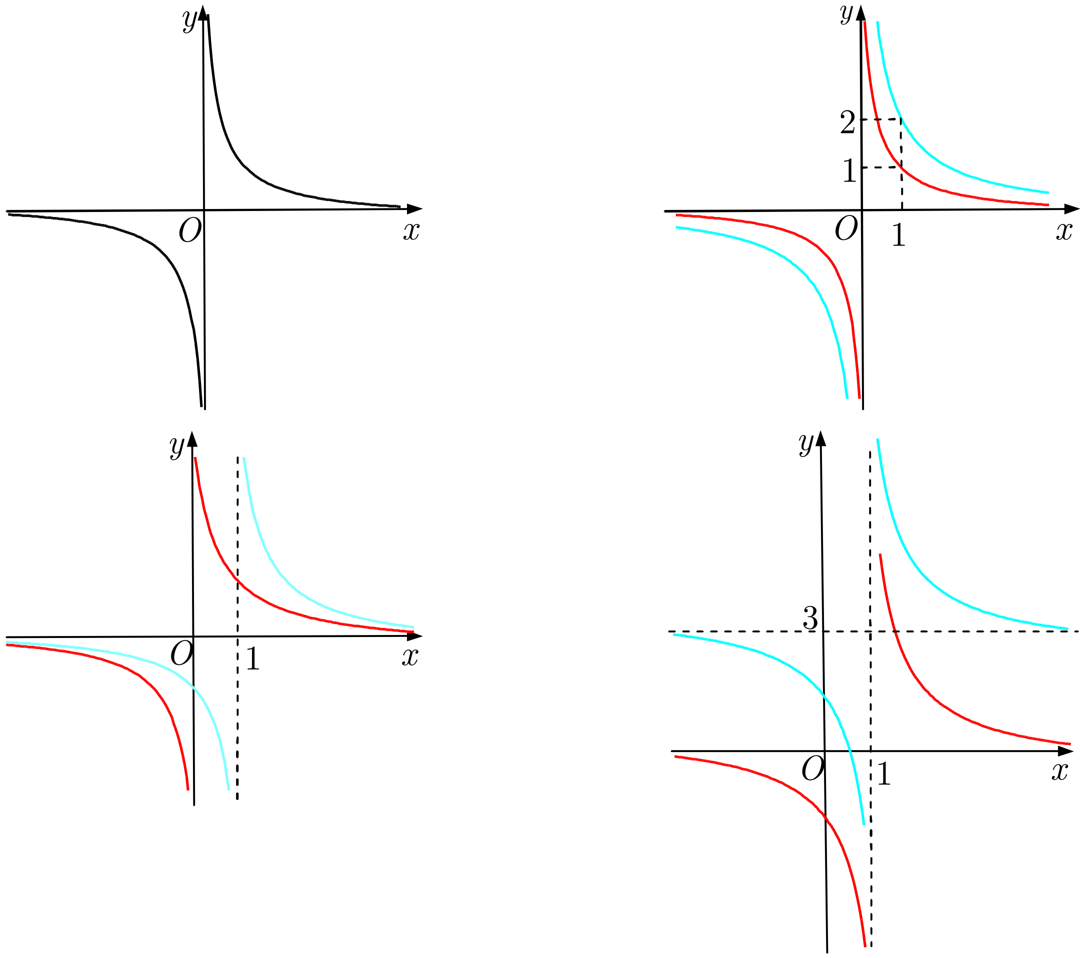


Рис. 5.26