Модуль 6. Границя і неперервність функції

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 6.1—6.4) і розширеному (розділи 6.1—6.5).

У модулі:

— запроваджено поняття границі функції в точці (мовою послідовностей та мовою околів), поняття однобічних границь функції в точці, поняття функції, неперервної в точці, асимптоти графіка функції;

— розглянуто властивості функцій, що мають скінченну границю і функцій, неперервних у точці;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

6.1. Границя функції в точці

6.1.1. Означення границі функції мовою послідовностей

Надалі під точкою розумітимемо або дійсне число, або одну з нескінченностей $\infty, +\infty$ та $-\infty$.

Розгляньмо функцію $f(x), x \in X$, і точку x_0, таку, щоб існувала послідовність $\{x_n\}$ точок множини X, відмінних від x_0.

Означення 6.1. (мовою послідовностей, за Гейне). Точку a звуть *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0, якщо для будь-якої послідовності точок $\{x_n\}$, *збіжної до* x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до точки a, тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

У цьому разі пишуть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Символічний запис означення 6.1 див. у *п. 6.5.1.*

Приклад. Обчислімо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 1}{5x^3 - 1}.$$

Нехай $\{x_n\}$ — будь-яка послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, тоді границя послідовності відповідних значень функції

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^3 + x_n^2 - 1}{5x_n^3 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n^3}}{5 - \frac{1}{x_n^3}} = \frac{2}{5}.$$

Завдяки довільності послідовності $\{x_n\}$ можна писати, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 1}{5x^3 - 1} = \frac{2}{5}.$$

Вправа 6.1. Показати, що не існує $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

Розв'язання вправи 6.1 див. у *п. 6.5.2.*

6.1.2. Означення границі функції мовою околів

Точку x_0 звуть *точкою дотикання* множини X, якщо будь-який окіл точки x_0 містить точки множини X. Приміром, точками дотикання інтервалу $(a;b)$ будуть його внутрішні точки і точки a та b.

Розгляньмо функцію $f(x), x \in X$, і точку x_0, яка є точкою дотикання множини X.

Означення 6.2 (***мовою околів, за Коші***). Точку A звуть *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0, якщо для будь-якого ε-*околу* $U_\varepsilon(A)$ точки A існує проколений δ-окіл $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, що для всіх

$$x \in X \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Символічний запис означення 6.2 див. у *п. 6.5.1.*

Використовуючи означення околу скінченної точки запишімо означення 6.2 в разі, якщо $x_0 \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$.

Означення 6.3. Число A звуть *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0 ($\Leftrightarrow$коли $x \to x_0$) (рис. 6.1) якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$, які справджують нерівність

$$0 < \left|x - x_0\right| < \delta,$$

виконано нерівність

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$$

Символічний запис означення 6.3 див. у *п. 6.5.1.*

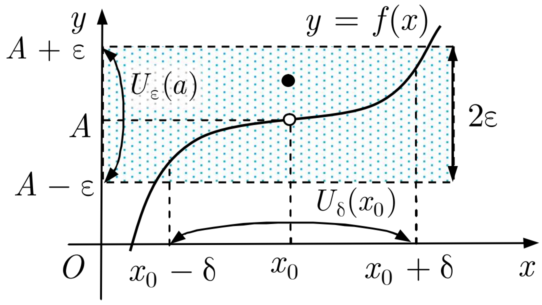

Рис. 6.1

Якщо $x_0 = +\infty, a \in \mathbb{R}$, то означення границі (рис. 6.2) формулюють так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in X : x > \delta \Rightarrow \left|f(x) - a\right| < \varepsilon.$$

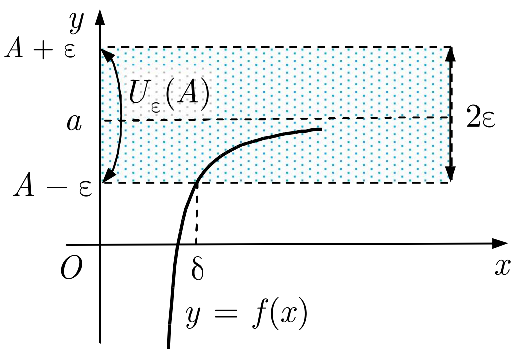

Рис. 6.2

Випадки, коли границя $A=+\infty, -\infty$ та ∞ ілюструє рис. 6.3.

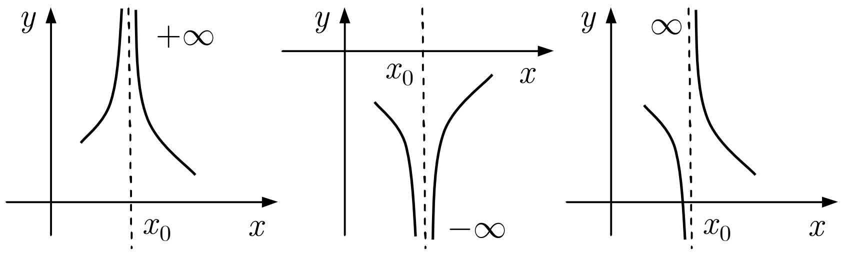

Рис. 6.3

Символічний запис відповідних означень див. у *п. 6.5.1.*

Зауваження 6.1.

1. Можна довести, що означення границі функції мовою околів та мовою послідовностей еквівалентні.

2. З погляду обчислювальної математики означення границі функції в точці має наступний зміст: з якою похибкою δ треба обчислити значення x_0, щоб похибка обчислення границі A не перевищувала заданої точності ε.

3. Точка x_0 може як належати області означення функції f так і не належати. Оскільки під час знаходження границі точку x_0 виключають з розгляду, то існування границі функції в точці є локальною властивістю функції.

6.1.3. Властивості функцій, що мають скінченну границю

Властивості.

1. Якщо функція має границю в точці, то ця границя єдина.

2. Функція, що має скінченну границю в точці, *обмежена* в деякому околі цієї точки.

3. Якщо функція f має границю $A\neq 0$ в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, в якому функція f має знак границі A.

4. Якщо в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x)\le f_2(x)$ і існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)\le \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

5 (***теорема про проміжну функцію***). Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A$ і в деякому околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Теорема 6.1.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$,

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = CA$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0.$

Властивості 1—5 та теорему 6.1 можна довести як подібні властивості границь числових послідовностей, якщо скористатися означенням границі функції за Гейне.

6.1.4. Однобічні границі

Лівим δ-*околом* точки x_0 звуть проміжок (рис. 6.4)

$$(x_0 - \delta; x_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\delta < x - x_0 \le 0\} \overset{\text{den}}{=} U(x_0 - 0), \delta > 0,$$

а *правим* δ-*околом* точки x_0 звуть проміжок (див. рис. 6.4)

$$[x_0; x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x - x_0 < \delta\} \overset{\text{den}}{=} U_\delta(x_0 + 0).$$

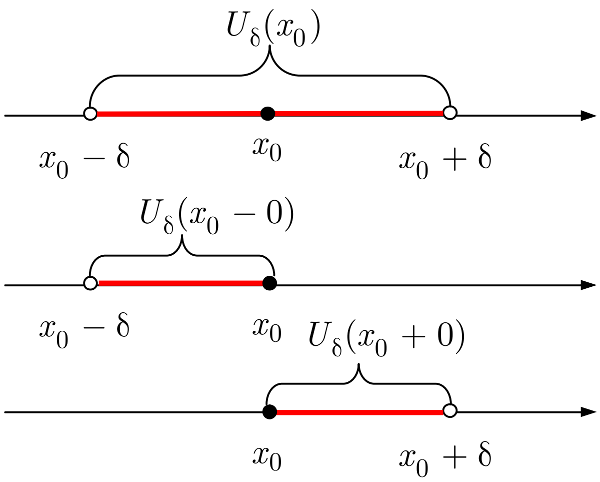

Рис. 6.4

Означення 6.4.

Точку A звуть *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0 *зліва* ($\Leftrightarrow$*ліву границю в точці* x_0), якщо для будь-якого ε-околу $U_\varepsilon(A)$ точки a існує проколений лівий δ-окіл $U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, що для всіх

$$x \in X \cap U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\}$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Точку A звуть *границею функції* $f(x), x \in X$, *у точці* x_0 *справа* ($\Leftrightarrow$ *праву границю в точці* x_0), якщо для будь-якого ε-околу $U_\varepsilon(A)$ точки a існує проколений правий δ-окіл $U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, що для всіх

$$x \in X \cap U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Границю зліва в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x);$$

Границю справа в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Зауваження 6.2. Границю, коли $x \to -\infty$, можна вважати границею справа, а границю, коли $x \to +\infty$,— границею зліва.

Теорема 6.2

(необхідна і достатня умова існування скінченної границі). Функція $f(x), x \in X$, має скінченну границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні границі зліва і справа:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Доведення див. у *п. 6.5.3.*

Приклад. Знайдімо однобічні границі функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in (-\infty; 2], \\ x, & x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

у точці $x_0 = 2$.

$$f(2 - 0) = \lim_{x \to 2 - 0} f(x) = \lim_{x \to 2 - 0} \frac{x^2}{4} = 1;$$
$$f(2 + 0) = \lim_{x \to 2 + 0} f(x) = \lim_{x \to 2 + 0} x = 2.$$

Оскільки однобічні границі існують, але не рівні між собою, в точці $x_0 = 2$ функція f границі не має (рис. 6.5).

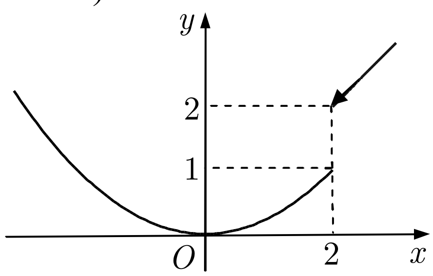

Рис. 6.5

6.2. Неперервність функції в точці

Означення 6.5. Функцію $f(x), x \in X$, звуть *неперервною в точці* x_0, якщо:

1) вона означена в точці x_0;
2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то цю рівність можна переписати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right).$$

Отже, для неперервної функції знаки границі і функції переставні.

З теореми 6.2 і означення 6.5 випливає, що необхідною і достатньою умовою неперервності функції в точці x_0 є

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

З означення неперервної в точці x_0 функції $y = f(x)$ випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{6.1}$$

Позначмо *приріст аргументу* в точці x_0 як

$$\Delta x \overset{\text{def}}{=} x - x_0$$

і відповідний йому *приріст функції* $f(x)$ як

$$\Delta f(x_0) \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тоді умову (6.1) можна переписати як

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Означення 6.6. Функцію $f(x), x \in X$, звуть *неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо приріст $\Delta f(x)$ функції в цій точці, відповідний приростові Δx аргументу, прямує до нуля, коли $\Delta x \to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Вправа 6.1. Довести (користуючись означенням) неперервність функції $f(x) = 4x^2 - 1$:
1) у точці $x_0 = 3$;
2) на всій області означення.

Розв'язання вправи 6.2 див. у *п. 6.5.4.*

6.3. Основні елементарні прийоми розкриття невизначеностей

6.3.1. Розкриття невизначеності вигляду $\dfrac{0}{0}$

Під час розгляду $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ можливі 7 типів невизначенностей:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0.$$

Розгляньмо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ — невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$.

1. Якщо $f(x)$ — раціональний дріб, то чисельник і знаменник дробу розкладають на множники і скорочують на спільний множник.
Приміром,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty.$$

2. Якщо $f(x)$ — дріб, що містить ірраціональні вирази, то ірраціональність переводять у чисельник або знаменник, використовуючи, приміром, формули:

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}};$$

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \frac{u - v}{\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{v^2}}.$$

Так

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{x(2 + \sqrt{x+4})}{4 - (x+4)} =$$
$$= -\lim_{x \to 0}(2 + \sqrt{x+4}) = -4.$$

6.3.2. Розкриття невизначеності вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}$

Розгляньмо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ — невизначеність вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Якщо $f(x)$ — раціональний дріб або дріб, який містить ірраціональності, то чисельник і знаменник дробу ділять на найстарший степінь x.

Приміром,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+4}{x^5+6x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}}{1+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{7}{x^5}}=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[5]{x^4}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+1}=1.$$

Зокрема, правдиве правило

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

6.3.3. Розкриття невизначеності вигляду $\infty-\infty$

Невизначеність вигляду $\infty-\infty$ перетворюють у невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, користуючись формулами:

$$u-v=\frac{1}{u^{-1}}-\frac{1}{v^{-1}}=\frac{v^{-1}-u^{-1}}{u^{-1}v^{-1}};$$

$$\sqrt{u}-\sqrt{v}=\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}};$$

$$\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}=\frac{u-v}{\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{uv}+\sqrt[3]{v^2}}.$$

Приміром,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\dfrac{5}{2}, x>0,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=-\dfrac{5}{2}, x<0.\end{cases}$$

6.4. Асимптоти графіка функції

6.4.1. Означення асимптоти

Означення 6.5. *Асимптотою* кривої з нескінченною гілкою звуть таку пряму, що віддаль d точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат (рис. 6.6).

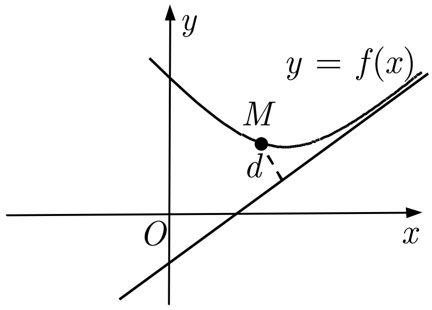

Рис. 6.6

6.4.2. Вертикальні асимптоти

Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty \text{ або } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty.$$

Справді, при цьому віддаль

$$d = \left| x - x_0 \right|$$

від точки $M(x; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$ до прямої $x = x_0$ прямує до нуля і точка M необмежено віддаляється від початку координат.

Приклади.

1. Графік функції $y = \dfrac{1}{x-1}$ має *двобічну* вертикальну асимптоту $x = 0$ (рис. 6.7) оскільки

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

2. Графік функції $y = e^{1/x}$ має *праву* вертикальну асимптоту $x = 0$ (рис.6.8), оскільки

$$\lim_{x \to -0} e^{1/x} = \left[e^{-\infty} \right] = 0,$$

$$\lim_{x \to +0} e^{1/x} = \left[e^{+\infty} \right] = +\infty.$$

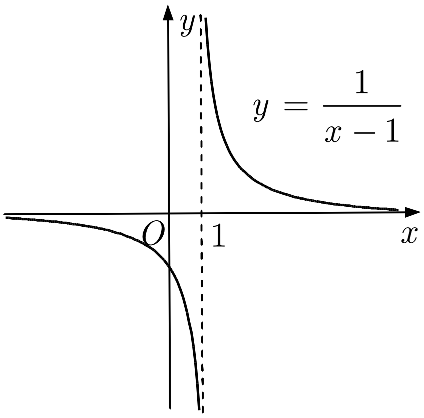

Рис. 6.7

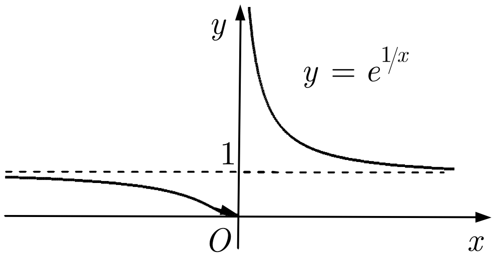

Рис. 6.8

6.4.3. Похилі асимптоти

Розгляньмо функцію $f(x)$ задану в околі $U_\varepsilon(+\infty)$ (випадок $-\infty$ розглядають так само). Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою графіка функції $y = f(x)$ (її звуть *похилою*, а в разі $k = 0$ — *горизонтальною асимптотою*).

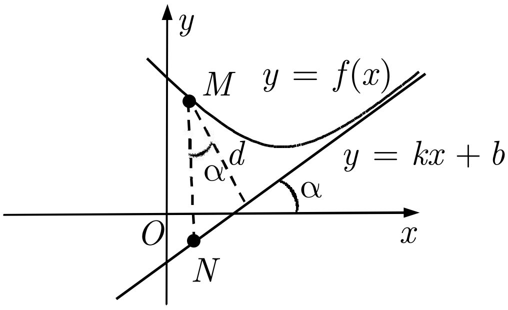

Рис. 6.9

Те що пряма $y = kx + b$ є асимптотою кривої $y = f(x)$, коли $x \to +\infty$, означає, згідно з означенням асимптоти, що віддаль d від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли $x \to +\infty$. З рисунку бачимо, що $d = \left|MN\right|\left|\cos\alpha\right|$. Оскільки $\cos\alpha \neq 0$, прямування до нуля d, коли $x \to +\infty$, тягне за собою прямування до нуля

$$\left|MN\right| = \left|f(x) - kx - b\right|,$$

і навпаки.

Отже, пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ тоді й лише тоді, коли

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (kx + b)\right) = 0.$$

Існування асимптоти графіка функції означає, що, коли $x \to +\infty$ функція поводить себе «майже як лінійна функція».

Теорема 6.3. Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b. \tag{6.2}$$

► $\boxed{\Rightarrow}$ Припустімо, що $y=kx+b$ — похила асимптота графіка функції. Тоді

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(kx+b))=0\Leftrightarrow f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

де $\alpha(x)\to 0$, коли $x\to\pm\infty$. Отже,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай існують обидві границі. Тоді із другої рівності матимемо, що

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(kx+b))=0.$$

Отже, $y=kx+b$ — похила асимптота.◄

Зауваження 6.3. Знаходячи похилі асимптоти графіка функції, маємо випадки:
1) обидві границі (6.2) існують і не залежать від знаку нескінченності, тоді пряму звуть *двобічною* похилою асимптотою графіка функції;
2) обидві границі (6.2) існують, але різні для $x\to-\infty$ та $x\to+\infty$, тоді прямі звуть *однобічними* асимптотами графіка функції;
3) якщо хоча б одна із границь (6.2) не існує, то похилих асимптот графік функції немає.

Приклади.

1. Графік функції $y=\dfrac{1}{x-1}$ має *двобічну* горизонтальну асимптоту $y=0$ (див. рис. 6.6) оскільки

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x-1}}{x}=0,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-1}-0\cdot x\right)=0.$$

2. Графік функції $y=x+\operatorname{arctg}x$ має ліву похилу асимптоту $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ і праву похилу асимптоту $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ (рис.6.10), оскільки

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+\operatorname{arctg} x}{x}\right) = $$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{x}\right) = 1,$$
$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\big((x+\operatorname{arctg} x)-x\big) = -\frac{\pi}{2},$$
$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\big((x+\operatorname{arctg} x)-x\big) = \frac{\pi}{2},$$

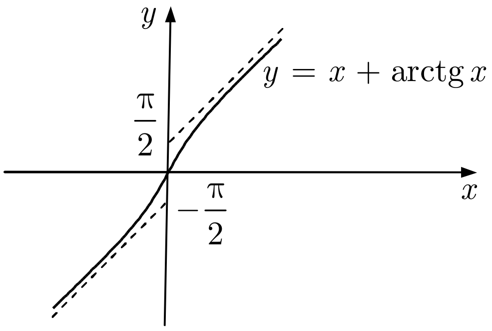

Рис. 6.10

6.5. Додаткові відомості

6.5.1. Символічні записи означень

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$

2. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} f(x) = A \in \mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : \left|x\right| > \delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$

4. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)\right| > \varepsilon.$

5. $f(x_0 - 0) = A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0 - 0) : \forall x \in U_\delta(x_0 - 0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$

6. $f(x_0 + 0) = A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U_\varepsilon(A)\exists U_\delta(x_0 + 0): \forall x \in U_\delta(x_0 + 0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$

7. f неперервна в точці x_0 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(f(x_0))\,\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in X \cap U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(x_0, \varepsilon) > 0\ \forall x \in X : \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

6.5.2. Розв’язання вправи 6.1

Для цього досить указати дві послідовності $\{x_n'\}$ та $\{x_n''\}$, такі, що $x_n' \to \infty$ та $x_n'' \to \infty$, коли $n \to \infty$, щоб відповідні послідовності значень функції збігались до різних границь.

Справді, якщо $\{x_n'\} = \{\pi n\}$ та $\{x_n''\} = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}$, то $\{x_n'\} \to \infty$, $\{x_n''\} \to \infty$, коли $n \to \infty$, але

$$\{f(x_n')\} = \{\sin \pi n\} = \{0\} \to 0, n \to \infty;$$
$$\{f(x_n'')\} = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right\} = \{1\} \to 1, n \to \infty.$$

6.5.3. Доведення теореми 6.2

$\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \qquad (6.3)$$

Оскільки нерівність (6.3) буде правдивою як в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$, так і в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$, то за означенням 6.4

$$a = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ та } a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $a = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ та $a = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі $\delta_1 > 0$ та $\delta_2 > 0$, що якщо $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ і відповідно $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, то

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Позначаючи через δ найменше з чисел δ_1, δ_2, дістанемо, що $|f(x) - a| < \varepsilon$ для всіх x таких, що

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Це й означає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

6.5.4. Розв’язання вправи 6.2

1) Обчислімо $f(3) = 35$. Функція $f(x) = 4x^2 - 1$ буде неперервною в точці $x_0 = 3$, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(3, \varepsilon) > 0\ \forall x : \left|x - 3\right| < \delta \Rightarrow \left|(4x^2 - 1) - 35\right| < \varepsilon.$$

Отже, нехай $|x - 3| < \delta$. Тоді, користуючись властивістю модуля дійсного числа, матимемо

$$\left|4x^2 - 36\right| = 4\left|x^2 - 9\right| = 4|x-3||x+3| < 4|x-3||(x-3)+6| <$$
$$< 4|x-3|(|x-3|+6) < 4\delta(\delta+6).$$

Нерівність $\left|4x^2 - 36\right| < \varepsilon$ виконуватиметься, якщо $4\delta(\delta+6) = \varepsilon$. Отже,

$$\delta^2 + 6\delta = \frac{\varepsilon}{4} \Leftrightarrow \delta^2 + 6\delta - \frac{\varepsilon}{4} = 0 \Rightarrow \delta_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + \frac{\varepsilon}{4}}.$$

Оскільки $\delta > 0$, то $\delta = -3 + \sqrt{9 + \frac{\varepsilon}{4}}$.

2) Областю означення функції y є вся числова вісь. Надамо аргументу x довільного приросту Δx і знайдімо приріст функції в точці x:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 4(x + \Delta x)^2 - 1 - (4x^2 - 1) =$$
$$= 8x\Delta x + 4\Delta x^2.$$

Нехай, тепер $\Delta x \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (8x\Delta x + 4\Delta x^2) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Отже, згідно з означенням 6.6 функція f буде неперервною для будь-якого значення x, тобто на всій області означення.