Модуль 7. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Визначні границі

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 7.1—7.3) і розширеному (розділи 7.1—7.4).

У модулі:

— запроваджено термінологію для порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій;

— доведено теорему про неперервність основних елементарних функцій на їхній області означення;

— доведено визначні границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ і наслідки з них;

— обґрунтовано застосування еквівалентностей — наслідків з визначних границь — до знаходження границь;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

7.1. Властивості функцій, неперервних у точці

Властивості.

1. Функція, *неперервна в точці*, *обмежена* в деякому *околі* цієї точки.

2. Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл $U(x_0)$, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$.

3. Якщо для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ і функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.

4. Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g$, fg та $\dfrac{f}{g}$ (у разі, якщо $g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0.

5. Нехай функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних у точці, випливають з *означення неперервності 6.5* і відповідних властивостей границі функції в точці (*п. 6.1.3*).

Доведення властивостей 4 та 5 див. у *п. 7.4.1.*

Теорема 7.1. Основні *елементарні функції* неперервні в усіх точках, де вони означені.

Доведення цієї теореми див. у *п. 7.4.2.*

Наслідок. З теореми 7.1 і властивостей неперервних функцій випливає, що кожна елементарна функція неперервна в її області означення.

7.2. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

7.2.1. Порівняння нескінченно малих і нескінченно великих функцій

Означення 7.1. Функцію f звуть *нескінченно малою* (н. м. ф.), коли $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

і *нескінченно великою* (н. в. ф.), якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (або } -\infty\text{, або } +\infty\text{).}$$

Властивості *нескінченно малих* і *нескінченно великих послідовностей* можна переформулювати для нескінченно малих і нескінченно великих функцій, зокрема правдиве

Твердження 7.1. **1.** Алгебрична сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

2. Добуток нескінченно малої функції, коли $x \to x_0$, на обмежену функцію є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

3. Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією, коли $x \to x_0$, і навпаки, обернена до нескінченно великої функції є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

4. Число a є границею функції f у точці x_0 тоді й лише тоді, коли функцію можна зобразити у вигляді

$$f(x) = a + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$.

Означення 7.2.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$. Тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ звуть *н. м. ф. вищого порядку, ніж* $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, (має *вищий порядок мализни*) і позначають

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), x \to x_0,$$

(символ o читають як «о-мале»);

2) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0, \neq \infty$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ звуть *н. м. ф. однакового порядку мализни*, коли $x \to x_0$ (мають «однакову швидкість» прямування до нуля) і позначають

$$\alpha(x) \asymp \beta(x), x \to x_0;$$

3) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ звуть *еквівалентними н. м. ф.*, коли $x \to x_0$ і позначають

$$\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0;$$

4) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ звуть *н. м. ф. вищого порядку, ніж* $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$, (має *вищий порядок мализни*) і позначають

$$\beta(x) = o(\alpha(x)), x \to x_0;$$

5) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ звуть *непорівняними н. м. ф.*

Приклади.

1. Н. м. ф. $\alpha(x) = x^2$ вищого порядку мализни, ніж н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x \to 0$. Справді,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0 \Leftrightarrow x^2 = o(x), x \to 0.$$

2. Н. м. ф. $\alpha(x) = 2x$ та $\beta(x) = x$ є н. м. ф. одного порядку мализни, коли $x \to 0$, оскільки

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2 \Leftrightarrow 2x \asymp x, x \to 0.$$

3. Н. м. ф. $\alpha(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ та $\beta(x) = x$, не порівняні, коли $x \to 0$, оскільки їхнє відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \sin \dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x = 0$.

Інколи потрібно знати не лише те, що одна н. м. ф. має вищий порядок, ніж інша, а й наскільки вище.

Означення 7.3.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$.
Якщо існує таке $k > 0$, що

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = A \ne 0, \ne \infty,$$

то $\alpha(x)$ звуть функцією k*-го порядку мализни щодо* $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, і пишуть

$$\alpha(x) \sim A(\beta(x))^k, x \to x_0.$$

Функцію $A(\beta(x))^k$ звуть *головною частиною функції* $\alpha(x)$ щодо $\beta(x)$, коли $x \to x_0$.

Приклади.

Н. м. ф. $\alpha(x) = 3x^2 + 2x^5$, має порядок мализни $k = 2$ щодо н. м. ф. $\beta(x) = x$, коли $x \to 0$, оскільки

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x^5}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(3 + 2x^3\right) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x^5 \sim 3x^2, x \to 0.$$

Функція $3x^2$ є головною частиною функції

$\alpha(x) = 3x^2 + 2x^5$ щодо функції $\beta(x) = x$, коли $x \to 0$.

Подібні означення формулюють і для нескінченно великих функцій — лише кажуть про порядок росту н. в. ф.

Приклади див. у *п. 7.4.1.*

7.2.2. Властивості еквівалентних нескінченно малих функцій

Твердження 7.2. Якщо функція f еквівалентна функції g, коли $x \to x_0$, то для будь-якої функції $h(x)$ правдиві формули:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Причому, якщо існують границі правих частин, то існують границі лівих частин рівностей.

►Доведімо першу формулу.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)h(x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} (g(x)h(x)) = \lim_{x\to x_0} (g(x)h(x)).◄$$

Твердження 7.3. Нескінченно малі в точці функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли їхня різниця є н. м. ф. вищого порядку щодо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, тобто

$$f(x) - g(x) = o(f(x));$$

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

► $\boxed{\Rightarrow}$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = o(f(x)), x \to x_0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $f(x) - g(x) = \alpha(x)$ — н. м. ф. вищого порядку, ніж $f(x)$, коли $x \to x_0$. Розгляньмо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) + \alpha(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{\alpha(x)}{g(x)}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \sim g(x), x \to x_0.◄$$

7.3. Визначні границі. Таблиця еквівалентностей

7.3.1. Перша визначна границя

Твердження 7.4. Якщо кут x виражений у радіанах, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

►Спершу доведімо нерівність

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1, x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Припустімо, що кут $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. З рисунку 7.1 видно, що

$$S_{\Delta OAB}<S_{\text{сек.}OAB}<S_{\Delta OAC}.$$

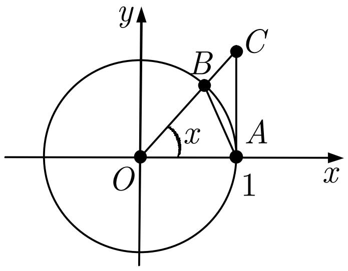

Рис. 7.1

Оскільки розглянуті площі рівні відповідно

$$\frac{1}{2}\sin x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

то

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Розділивши всі члени цієї рівності на $\sin x>0$, дістанемо

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Ця нерівність буде правдивою і для $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ завдяки парності функцій $y=\cos x$ та $y=\frac{\sin x}{x}$.

Обидві функції $f_1(x)=\cos x$ та $f_2(x)=1$ мають у точці $x=0$ границю, рівну одиниці. За теоремою про проміжну функцію (див. властивість 5 *п. 6.1.3*) одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. ◄$$

Наслідки.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$

►Справді,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Отже, й

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|x=\sin t\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left|x=\operatorname{tg} t\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}=1. ◄$$

7.3.2. Друга визначна границя

Твердження 7.5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{1/y}=e.$$

►1. Спершу доведімо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Нехай $x\ge 1$ і $[x]=n$, тоді

$$n\le x<n+1\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n};$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Якщо $x\to+\infty$, то $n\to\infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

За властивістю 5 *п. 6.1.3* маємо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Доведімо тепер, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Нехай $x<-1$. Запровадьмо змінну $y=-x$, тоді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Покладаючи $y = \dfrac{1}{x}$ у другій визначній границі, дістанемо

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e. \ ◄$$

Наслідки.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu.$

► 1. Зауважмо, що

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x} = \frac{\ln(1+x)^{1/x}}{\ln a}.$$

Функція $y = \ln(1+x)^{1/x}$ — є складеною функцією, утвореною функціями $y = \ln u, u = (1+x)^{1/x}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, і функція $y = \ln u$ неперервна в точці $x = e$, та на підставі властивості 5 *розд. 7.1* — теореми про границю складеної функції — дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{1/x}}{\ln a} =$$
$$= \frac{1}{\ln a}\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

Зокрема, при $a = e$, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

2. Покладімо $a^x - 1 = y$. Звідси $a^x = 1 + y, x = \log_a(1+y)$. Зрозуміло, що $y \to 0$, коли $x \to 0$. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

Зокрема, при $a = e$, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

3. Покладімо $(1+x)^{\mu}-1=y$. Тоді $(1+x)^{\mu}=1+y$, звідки

$$\mu\ln(1+x)=\ln(1+y).$$

Зрозуміло, що $y\to 0$, коли $x\to 0$. Отже,

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}.$$

Спрямувавши x до нуля, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu.◄$$

7.3.3. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Із тверджень 7.4 та 7.5 і наслідків з них випливає така таблиця еквівалентностей:

1. $\sin x\sim x, x\to 0.$
2. $\operatorname{tg} x\sim x, x\to 0.$
3. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}, x\to 0.$
4. $\arcsin x\sim x, x\to 0.$
5. $\operatorname{arctg} x\sim x, x\to 0.$
6. $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}, x\to 0,$
7. $\ln(1+x)\sim x, x\to 0.$
8. $a^x-1\sim x\ln a, x\to 0.$
9. $e^x-1\sim x, x\to 0.$
10. $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x, x\to 0.$

Н. м. ф., що стоять у правих частинах виписаних еквівалентностей, є головними частинами функцій, що стоять у лівих частинах, коли $x\to 0$.

Зауваження 7.1.

1. Формули таблиці еквівалентностей залишаться правильними, якщо x замінити на будь-яку н. м. ф. $\alpha(x)$, коли $x\to x_0$. Приміром,

$$\sin(5(x-1)^2)\sim 5(x-1)^2, x\to 1.$$

2. Розгляньмо функцію $f(x)=ax^m+bx^n, m<n.$

$$f(x)\sim ax^m, x\to 0;$$
$$f(x)\sim bx^n, x\to\infty.$$

3. З таблиці еквівалентностей і твердження 7.3 випливають *асимптотичні рівності*. Приміром,

$$\sin x=x+o(x), x\to 0,$$

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2), x\to 0.$$

4. У разі добутку та частки під знаком границі **можна** міняти н. м. ф. на еквівалентну їй н. м. ф (*Твердження 7.2*).

5. У разі різниці (суми) еквівалентних нескінченно малих функцій під знаком границі **не можна** міняти н. м. ф на еквівалентні. У цьому разі перетворюють різницю (суму) на добуток (частку) або використовують асимптотичні рівності.

Приклади.

Для обчислення границь скористаємось зауваженням 7.1 та таблицею еквівалентностей.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\left|\begin{matrix}1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}, x\to 0,\\ \ln(1+x^2)\sim x^2, x\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x\sim x, x\to 0\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}, x\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

7.3.4. Розкриття невизначеності вигляду $0\cdot\infty$

Невизначеність вигляду $0\cdot\infty$ перетворюють при потребі в невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, користуючись формулами:

$$uv=\frac{u}{v^{-1}}=\frac{v}{u^{-1}}.$$

Приміром,

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1.$$

7.3.5. Розкриття невизначеності вигляду 1^{∞}

Розгляньмо границю вигляду

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)},$$

де $u(x)\to 1, v(x)\to\infty, x\to x_0,$— невизначеність вигляду 1^{∞}.

Перетворімо вираз під знаком границі:

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln(1+(u(x)-1))}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln(1+(u(x)-1))}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}.$$

Тут скористались низкою еквівалентностей і неперервністю експоненціальної функції.

Отже,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u^v = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}.}$$

Приміром,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-1/2}.$$

7.4. Додаткові відомості

7.4.1. Доведення властивостей неперервних функцій

1. Доведення властивості 4.

►Доведімо, приміром, неперервність функції fg в точці x_0.

З неперервності функцій f та g в точці x_0 випливає, що

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0).$$

Отже, функція fg неперервна в точці x_0.◄

2. Доведення властивості 5.

►На підставі неперервності f у точці $y_0 = g(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall y : |y - y_0| < \sigma \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

Внаслідок неперервності функції g в точці x_0 для знайденого σ маємо

$$\exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \sigma.$$

З цих нерівностей випливає, що для всіх x, які справджують нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконано нерівність

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon,$$

тобто функція $f(g)$ неперервна в точці x_0.◄

7.4.2. Доведення теореми 7.1

1. Стала функція. Функція $f(x) = c = \mathrm{const}, x \in X,$ неперервна в будь-якій точці $x_0 \in X$, оскільки

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c = f(x_0).$$

2. Многочлени і раціональні функції. Доведімо неперервність функції $f(x) = ax^k$ в будь-якій точці x. За *біноміальною формулою Ньютона*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(a(x+\Delta x)^k-ax^k)=$$
$$=a\lim_{\Delta x\to 0}(x^k+C_k^1x^{k-1}\Delta x+C_k^2x^{k-2}\Delta x^2+...+\Delta x^k-x^k)=$$
$$=a\lim_{\Delta x\to 0}(C_k^1x^{k-1}\Delta x+C_k^2x^{k-2}\Delta x^2+...+\Delta x^k)=0.$$

Отже, функція $f(x)=ax^k$ неперервна в будь-якій точці x. Тоді многочлен

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,$$

де $a_k\in\mathbb{R}, k=\overline{0,n}$, неперервна функція в будь-якій точці x як сума неперервних функцій вигляду $a_{n-k}x^k, k=\overline{0,n}$.

Раціональна функція

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ — многочлени степенів n та m відповідно, в усіх точках, де многочлен $Q_m(x)$ відмінний від нуля, неперервна як відношення двох неперервних функцій.

3. Тригонометричні функції $y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$. З нерівності (яка випливає з доведення першої визначної границі)

$$\left|\sin x\right|\le\left|x\right|\forall x$$

випливає, що

$$0\le\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le\frac{\left|\Delta x\right|}{2}.$$

Маємо для будь-якого x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\sin x=\lim_{\Delta x\to 0}(\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\left|\begin{matrix}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{matrix}\right|=0;$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\cos x=\lim_{\Delta x\to 0}(\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\left|\begin{matrix}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{matrix}\right|=0.$$

Тобто функції $y=\sin x$ та $y=\cos x$ — неперервні в будь-якій точці $x\in\mathbb{R}$.

Функція $y=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ неперервна в точках, де $x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$, тобто в точках де $\cos x\ne 0$; функція $y=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ неперервна в точках, де $x\ne\pi n, n\in\mathbb{Z}$ (як частка неперервних функцій).

4. Покажімо спершу, що $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$. Для цього розгляньмо нерівність

$$|a^x-1|<\varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ — задане число. Перетворімо нерівність:

$$|a^x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon.$$

Переконаймося тепер, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon$ виконано нерівність

$$1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

При $a > 1$ нерівність $a^{1/n} > 1 - \varepsilon$ виконано, оскільки функція a^x при $a > 1$ зростає і $a^0 = 1$.

Покажімо тепер, що при $a > 1, \varepsilon > 0,$ виконано нерівність

$$a^{1/n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow a < (1 + \varepsilon)^n.$$

Послідовність $\{(1+\varepsilon)^n\}$ зростає, коли $n \to \infty$, що випливає з нерівності Бернуллі, тобто

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon.$$

Отже, для всіх $n > N_\varepsilon$, виконано нерівність

$$a < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

А при $0 < x < \dfrac{1}{n}$ з цієї нерівності випливає, що

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon.$$

Так само можна показати, що знайдеться таке натуральне число M, що для всіх $m > M$ виконуватиметься нерівність

$$1 - \varepsilon < a^{-1/m} < 1 + \varepsilon.$$

При $-\dfrac{1}{m} < x < 0$ з цієї нерівності випливає, що

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon.$$

Покладімо $P = \max(N_\varepsilon, M)$. Тоді, якщо $|x| < \dfrac{1}{P}$, то завдяки зростанню функції $a^x, a > 1$, матимемо, що

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon.$$

Отже, функція $y = a^x, a > 1$, неперервна в точці $x = 0$.

Якщо ж $0 < a < 1$, то

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} a^x = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Розгляньмо тепер

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{(x - x_0) \to 0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \ \forall x_0 \in A.$$

Отже, функція $y = a^x$ неперервна в будь-якій точці $x \in \mathbb{R}$.

5. Неперервність логарифмічної функція $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$, степеневої функції $y = x^\alpha, x > 0$, та обернених тригонометричних функцій $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$ буде обґрунтовано в модулі 8. ◄

7.4.3. Приклади порівняння нескінченно великих функцій

1. Н. в. ф. $\alpha(x) = x^2 + 4$ є н. в. ф. нижчого порядку, ніж $\beta(x) = x^3 - 3,$ коли $x \to \infty,$ (має нижчий порядок росту), оскільки

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2} = 0.$$

2. Н. в. ф. $\alpha(x) = 2x^2 + 1$ та $\beta(x) = x^2 - 1$ мають однаковий порядок росту, коли $x \to \infty$, оскільки

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2.$$

3. Функція $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x} + 1$ є н. в. ф. 2-го порядку щодо н. в. ф. $\beta(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1,$ коли $x \to 0,$ оскільки

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x} + 1}{\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^3 + x^4}{1 + 2x^2 + x^4} = 1.$$