Модуль 8. Точки розриву функції. Функції, неперервні на відрізку

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 8.1—8.2) і розширеному (розділи 8.1—8.3).

У модулі:

— запроваджено класифікацію точок розриву;

— сформульовано властивості функцій, неперервних на відрізку;

— подано алгоритм методу половинного поділу наближеного розв'язання рівнянь;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

8.1. Точки розриву функції

8.1.1. Класифікація точок розриву

Точку, в якій функція f *неперервна*, звуть *точкою неперервності* функції f.
Розгляньмо функцію $f(x), x \in X$, означену в деякому *околі* точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 8.1. Точку x_0 звуть *точкою розриву* функції f, якщо: функція f або не означена в точці x_0, або f означена в цій точці, але не є в ній неперервною.

Приміром, точка $x_0 = 0$ є точкою розриву функції

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

оскільки функція f не означена в цій точці (рис. 8.1). Ця ж точка $x_0 = 0$ є точкою розриву функції $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (рис. 8.2).

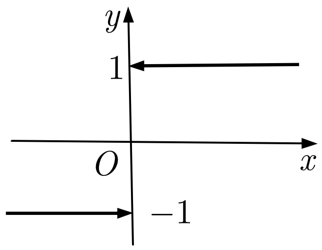

Рис. 8.1

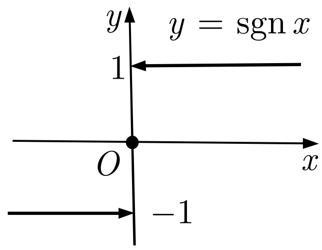

Рис. 8.2

Отже, розрив функції в точці x_0 геометрично означає «розрив» графіка функції в цій точці.

Точки розриву класифікують залежно від порушення умови неперервності функції.

Означення 8.2. Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні однобічні границі функції $f(x_0 - 0)$ та $f(x_0 + 0)$, то її звуть *точкою розриву 1-го роду* ($\Leftrightarrow$ *точкою скінченного розриву*), а величину

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

звуть *стрибком функції* (рис. 8.3).
У разі, якщо в точці розриву x_0 функція f не має хоча б однієї однобічної границі (приміром, рис. 8.4) або має нескінченну границю (приміром, рис. 8.5), то точку x_0 звуть *точкою розриву 2-го роду.*

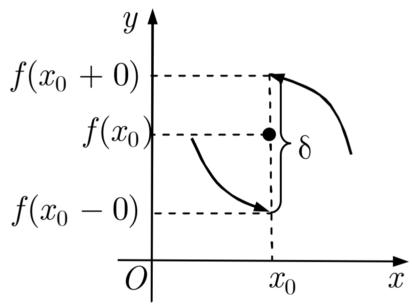

Рис. 8.3

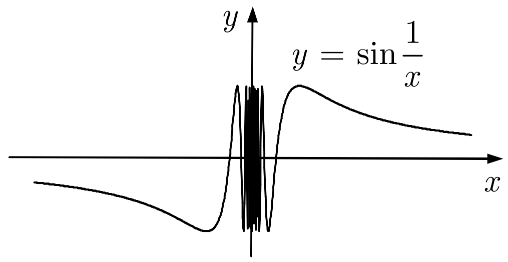

Рис. 8.4

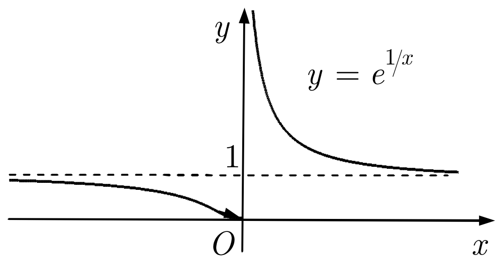

Рис. 8.5

Зауваження 8.1. Якщо стрибок функції в точці розриву 1-го роду x_0 дорівнює нулеві, то точку x_0 звуть *точкою усувного розриву* (рис. 8.6).

Усувний розрив можна «усунути», змінюючи значення функції в точці x_0 (або доозначуючи функцію f у точці x_0), тобто утворюючи нову функцію

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0, \\ f(x_0\pm 0), & x=x_0, \end{cases}$$

що збігається з функцією f скрізь, окрім точки x_0. Тоді $g(x)$ буде вже неперервною в цій точці (рис. 8.7).

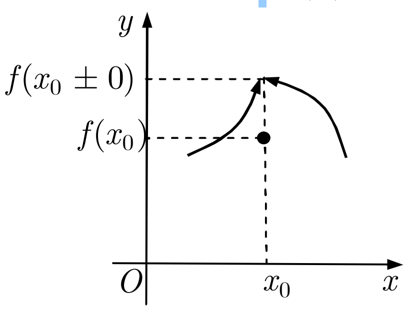

Рис. 8.6

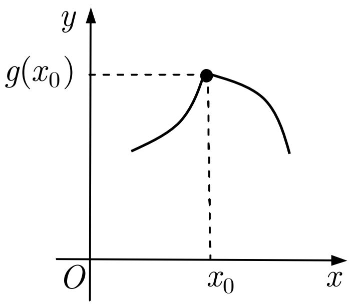

Рис. 8.7

Зауваження 8.2. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 існують обидві однобічні границі, але одна (чи обидві) нескінченна, то точку x_0 звуть *точкою нескінченного розриву* ($\Leftrightarrow$ *полюсом*). У таких точках графік функції має вертикальну асимптоту $x=x_0$ (рис. 8.8).

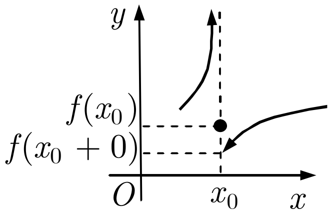

Рис. 8.8

Зауваження 8.3. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 не існує хоча б одна з однобічних границь, то точку x_0 звуть *точкою істотного розриву* (див. рис. 8.4).

8.1.2. Дослідження функцій на неперервність

З *теореми 7.1* випливає, що точками розриву *елементарної функції* можуть бути лише точки, в яких вона неозначена.

Неелементарна функція може мати точки розриву як у точках, де вона означена, так і в точках, де вона неозначена. Зокрема, якщо функцію задано різними аналітичними виразами для різних проміжків зміни аргументу, то вона може мати розриви в тих точках, де міняється її аналітичний вираз (неелементарні функції можуть мати дуже складну структуру і можуть бути означені на всій числовій прямій і бути розривними в кожній точці).

Досліджують функцію $f(x)$ на неперервність у точці x_0 так:

1) знаходять $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$;

2) висновують:

а) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0),$$

то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0;

б) якщо існують скінченні однобічні границі і

$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$ або функція не означена в точці x_0,

то функція $f(x)$ має розрив 1-го роду, усувний, у точці x_0;

в) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0+0)\neq f(x_0-0),$$

то функція $f(x)$ має розрив 1-го роду, неусувний, у точці x_0;

г) якщо існують однобічні границі і хоча б одна з них нескінченна, то функція $f(x)$ має розрив 2-го роду, нескінченний, — полюс — у точці x_0

ґ) якщо хоча б одна із границь не існує, то функція $f(x)$ має розрив 2-го роду, істотний, у точці x_0.

Приклади. **1.** Для функції $y=\operatorname{sgn} x$ (див. рис. 8.2) точка $x_0=0$ є точкою розриву 1-го роду (скінченного розриву), і стрибок у ній дорівнює 2:

$$\operatorname{sgn}(+0) = 1, \operatorname{sgn}(-0) = -1;$$

$$\delta = \operatorname{sgn}(+0) - \operatorname{sgn}(-0) = 2.$$

2. Для функції $y = |\operatorname{sgn} x|$ (рис. 8.9) точка $x_0 = 0$ є точкою розриву 1-го роду, усувного:

$$|\operatorname{sgn}(+0)| - |\operatorname{sgn}(-0)| = 1 - 1 = 0.$$

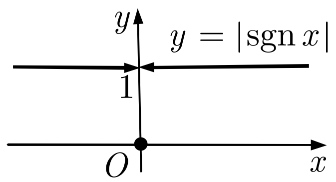

Рис. 8.9

3. Для функцій $y = \sin\dfrac{1}{x}$ (див. рис. 8.4) точка $x = 0$ є точкою розриву 2-го роду, істотного.

4. Для функції $y = e^{1/x}$ (див. рис. 8.5) $x = 0$ є точкою розриву 2-го роду — полюсом.

8.2. Властивості функцій, неперервних на відрізку

8.2.1. Теореми Ваєрштраса

Кажуть, що функція f у точці x_0 *неперервна справа*, якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, і *неперервна зліва*, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Означення 8.3. 1. Функцію f звуть *неперервною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.
2. Функцію f звуть *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$ і в точці a неперервна справа, а в точці b — неперервна зліва. Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.

Теорема 8.1. (***1-а теорема Ваєрштраса***). Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, *обмежена* на ньому.

Важливі леми і доведення теореми 8.1 див. у *п. 8.3.2.*

Зауваження 8.4. Якщо функція f неперервна в інтервалі (або на півінтервалі $[a;b)$, або на півінтервалі $(a;b]$), то f не обов'язково обмежена на ньому. Приміром, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ неперервна на півінтервалі $(0;1]$, але не є обмежена на ньому.

Розгляньмо функцію f, обмежену на множині X.

Означення 8.4. *Точною верхньою межею функції* $y = f(x), x \in X,$

звуть *точну верхню межу множини* значень функції f:

$$M = \sup_{x \in X} f(x).$$

Точною нижньою межею функції $y = f(x), x \in X$, звуть *точну нижню межу множини* значень функції f:

$$m = \inf_{x \in X} f(x).$$

Точну верхню межу M неперервної на відрізку $[a;b]$ функції звуть *найбільшим значенням функції* на цьому відрізку і позначають

$$\max_{[a;b]} f(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in [a;b]} f(x) = M.$$

Точну нижню межу m неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f звуть *найменшим значенням функції* на цьому відрізку і позначають

$$\min_{[a;b]} f(x) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in [a;b]} f(x) = m.$$

Теорема 8.2. (***2-а теорема Вейєрштраса***). Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значення (рис. 8.10).

Доведення теореми 8.2 див. у *п. 8.3.3.*

Досягати свої найбільше та найменше значення на відрізку $[a;b]$ функція f може і в кількох точках (рис. 8.11).

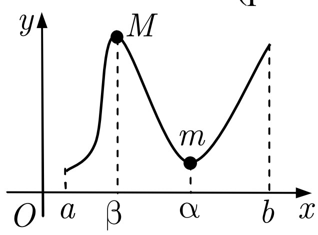

Рис. 8.10

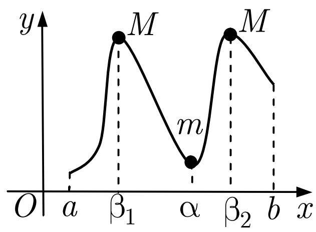

Рис. 8.11

Зауваження 8.5. Якщо функція f неперервна в інтервалі $(a;b)$, то вона може й не досягати на ньому найбільшого чи найменшого значення. Приміром, функція $y = x^2, x \in (-1;1)$. Справді, $\sup\limits_{x \in (-1;1)} x^2 = 1$, але в жодній точці інтервалу $(-1;1)$ функція не досягає цього значення. Отже, функція $f(x) = x^2, x \in (-1;1)$, не досягає в цьому інтервалі свого найбільшого значення. Найменше значення $m = \inf\limits_{x \in (-1;1)} x^2$ досягається в точці $x = 0$.

8.2.2. Теореми Больцано — Коші

Теорема 8.3. (1-а теорема Больцано — Коші). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A=f(a)$ і $B=f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c)=0$ (рис. 8.12).

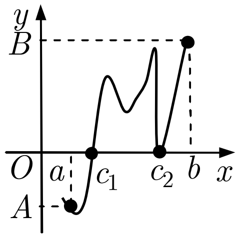

Рис. 8.12

►Нехай для визначеності $f(a)=A<0, f(b)=B>0$. Поділімо відрізок $[a;b]$ точкою x_0 навпіл. Якщо $f(x_0)=0$, то теорему доведено, а якщо $f(x_0)\neq 0$, то візьмімо ту половину $[a_1;b_1]$ відрізка $[a;b]$, тобто $a_1=a, b_1=x_0$ або $a_1=x_0, b_1=b$, для якої $f(a_1)<0, f(b_1)>0$.

Знову поділімо вибраний відрізок $[a_1;b_1]$ навпіл точкою x_1. Якщо $f(x_1)=0$, то шукану точку $c=x_1$ знайдено. Якщо ж $f(x_1)\neq 0$, то візьмімо ту половину $[a_2;b_2]$ відрізка $[a_1;b_1]$, для якої $f(a_2)<0, f(b_2)>0$.

Продовживши ці міркування, знайдімо через скінченну кількість кроків точку $c\in(a;b)$, що $f(c)=0$. Інакше, існує послідовність стяжних вкладених відрізків $[a_n;b_n], n\in\mathbb{N}$, для яких $f(a_n)<0, f(b_n)>0$.

Із щільності множини дійсних чисел випливає, що знайдеться єдина точка $c\in(a;b)$, спільна для всіх цих відрізків, причому

$$c=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Враховуючи неперервність функції f і спрямувавши в нерівностях $f(a_n)<0, f(b_n)>0$ n до ∞, одержимо, що

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)\leq 0, \lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(c)\geq 0,$$

тобто $f(c)=0$.◄

Зауваження 8.6. Вимога неперервності функції f на відрізку $[a;b]$ суттєва: функція, що має розрив хоча б в одній точці, може перейти від від'ємного значення до додатного і не набуваючи нульового значення. Приміром, функція (рис. 8.13)

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leq x<0,\\ 1, & 0\leq x\leq 1.\end{cases}$$

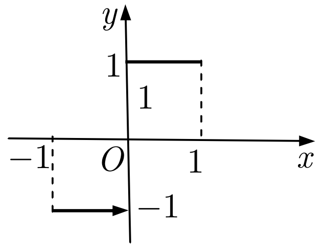

Рис. 8.13

Вправа 8.1. Показати, що будь-який *многочлен* непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

Розв'язання вправи 8.2 див. у *п. 8.3.4.*

Теорема 8.4. (2-а теорема Больцано — Коші). Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b], f(a)=A, f(b)=B$, і C — будь-яке число, що лежить між A та B, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка c, в якій $f(c)=C$ (рис. 8.14).

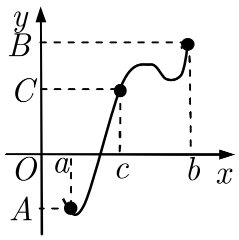

Рис. 8.14

►Нехай для визначеності $A<B$. Тоді для функції $\varphi(x)=f(x)-C$ маємо:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0;$$

$$\varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Отже, функція $\varphi(x)$ на кінцях відрізку $[a;b]$ має різні знаки. За 1-ю теоремою Больцано — Коші існує точка $c\in(a;b)$, що

$$\varphi(c)=f(c)-C=0\Rightarrow f(c)=C. ◄$$

Зауваження 8.7. З того що функція означена на відрізку і набуває всіх своїх проміжних значень на ньому ще не випливає її неперервність на цьому відрізку (рис. 8.15).

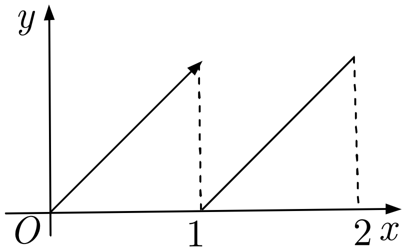

Рис. 8.15

8.2.3. Наближене розв'язання рівняння $f(x)=0$

На твердженні теореми 8.3 ґрунтується метод половинного поділу розв'язання рівнянь $f(x)=0$ з певною точністю ε. Блок-схему методу подано на рис. 8.16.

На кожному кроці обчислювального процесу шуканий корінь лежить усередині відрізку $[a_k;b_k]$, і, як тільки довжина цього відрізку стає менша за ε (заданої точності), ітераційний процес завершують. У цьому методі використовують мінімальна інформація про функцію f (лише її знак). Тому метод потребує порівняно великої кількості ітерацій, але збіжність цього методу (тобто одержання кореня рівняння із заданої точністю) гарантовано. Довжина відрізку $[a_k;b_k]$ на кожному кроці зменшується вдвічі. Обчислення завершують, коли

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \le \varepsilon.$$

Отже, корінь з точністю ε можна одержати не пізніше ніж на кроці

$$k = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1.$$

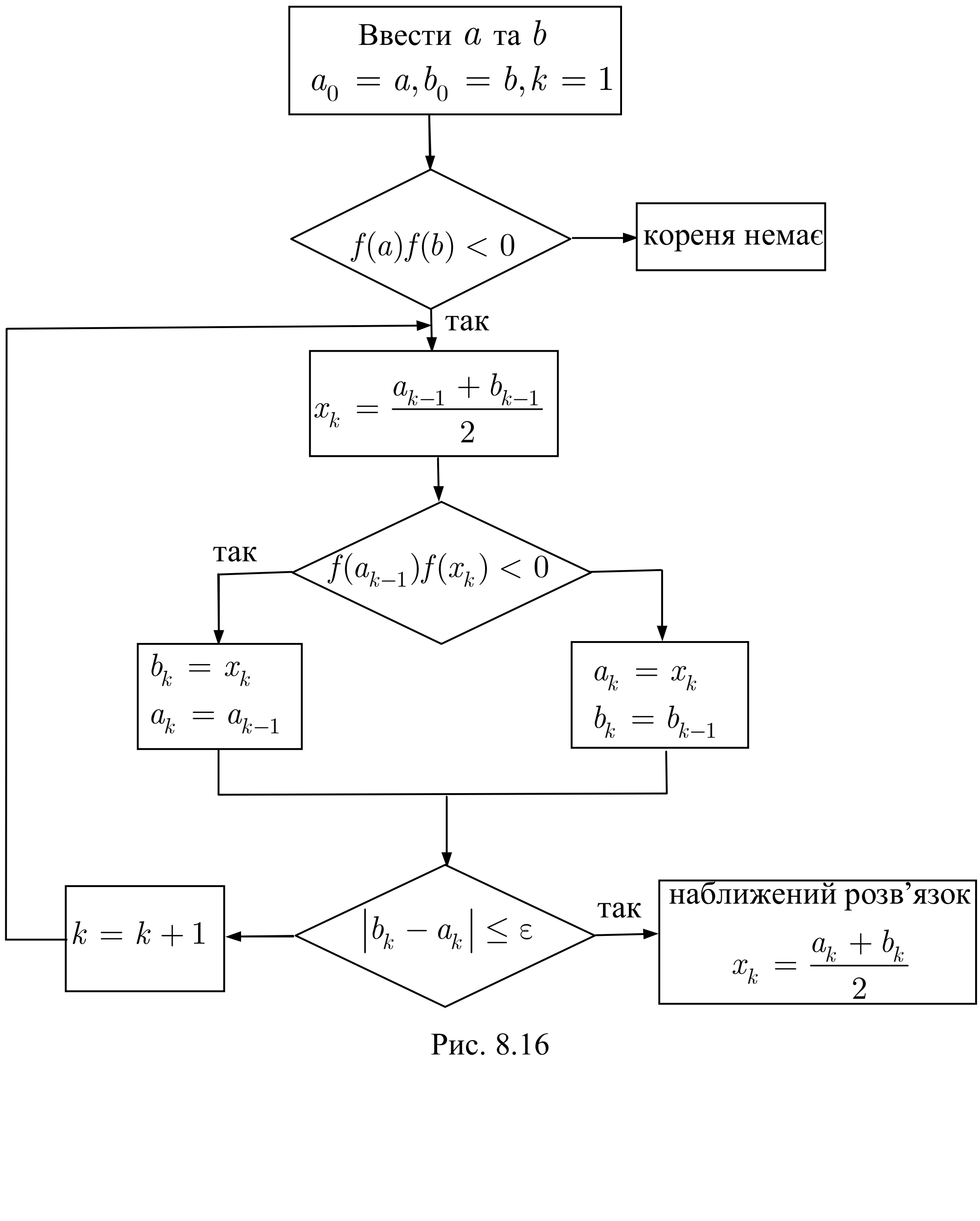

Рис. 8.16

8.2.4. Неперервність оберненої функції

Теорема 8.5. Якщо функція f строго *монотонна* на відрізку $[a;b]$ та $[A;B]$ — множина її значень, то на $[A;B]$ існує обернена функція f^{-1}, що є строго монотонною.

Доведення теореми 8.5 див. у *п. 8.3.5.*

Теорема 8.6. ***(про неперервність оберненої функції).*** Якщо функція f строго монотонна і неперервна на відрізку $[a;b]$, то обернена функція f^{-1} неперервна на $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

Доведення теореми 8.6 див. у *п. 8.3.6.*

Неперервність обернених тригонометричних функцій $\arcsin x, \arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ та $\operatorname{arcctg} x$ у їхніх областях означення випливає з теорем 8.5, 8.6 і неперервності та строгої монотонності функції $\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ на $[0;\pi]$, $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{ctg} x$ на $(0;\pi)$.

8.3. Додаткові відомості

8.3.1. Важливі леми. Доведення теореми 8.1

Кажуть, що сукупність відрізків $[a_n;b_n], n \in \mathbb{N}$, утворює *систему вкладених відрізків*, якщо виконано умови (рис. 8.17)

$$[a_{n+1};b_{n+1}] \subset [a_n;b_n] \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n.$$

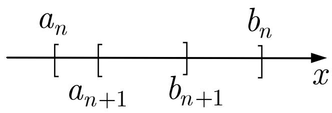

Рис. 8.17

При цьому вкладені відрізки утворюють *систему стяжних відрізків*, якщо

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Лема 8.1 (***Кантора***). Будь-яка послідовність вкладених стяжних відрізків має єдину спільну точку.

►З означення вкладених відрізків випливає:

1) монотонність послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$, справді $\{a_n\}$ не спадає, а послідовність $\{b_n\}$ не зростає;

2) обмеженість, справді $a_n \le b_1, b_n \ge a_1$.

Отже, ці послідовності збігаються і з рівності

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Крім того за ознакою Ваєрштраса (*теорема 4.2*) маємо:

$$a_n \le \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що спільною точкою всіх відрізків $[a_n; b_n]$ є число a.◄

Лема 8.2 (***Больцано — Ваєрштраса***). З будь-якої обмеженої послідовності можна вилучити збіжну підпослідовність.

►Нехай $[a;b]$ — відрізок, на якому розташовано обмежену послідовність $\{x_n\}$. Поділімо його навпіл і візьмімо ту його половину $[a_1;b_1]$, на якій розташовано нескінченну кількість членів послідовності. Виберімо на відрізку $[a_1;b_1]$ довільний член послідовності $\{x_n\}$ і позначимо його x_{n_1}. Відрізок $[a_1;b_1]$ знову поділімо навпіл і візьмімо ту його частину $[a_2;b_2]$, де розташовано нескінченну кількість членів послідовності. На відрізку $[a_2;b_2]$ виберімо довільний член x_{n_2} заданої послідовності, причому $n_2 > n_1$.

Продовжуючи цей процес, одержимо, з одного боку, послідовність вкладених стяжних відрізків, а з іншого,— підпослідовність $\{x_{n_k}\}, k \in \mathbb{N}$, для членів якої виконано умову

$$a_n \le x_{n_k} \le b_n, k \in \mathbb{N}.$$

На підставі леми Кантора маємо, що існує таке число a, для якого

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Тоді з теореми про три послідовності (див. *п. 4.1.3*) випливає, що й

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a,$$

тобто підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ — збіжна.◄

Доведення теореми 8.1

►Припустімо, що f не обмежена на відрізку $[a;b]$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ знайдеться точка $x_n \in [a;b]$, така, що $|f(x_n)| > n$. З обмеженої послідовності $\{x_n\}$ $(a \le x_n \le b)$ на підставі леми Больцано — Ваєрштраса можна вилучити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, для якої

$$a \le \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \le b.$$

Тоді, з одного боку,

$$\lim_{n\to\infty} \left|f(x_{n_k})\right| = \infty$$

на підставі необмеженості $\{f(x_n)\}$, а з другого —

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_n)| = |f(c)| < \infty$$

на підставі неперервності f. Одержали суперечність. Отже, неперервна на відрізку функція не може бути на ньому необмеженою.◄

8.3.2. Доведення теореми 8.2

►На підставі теореми 8.1 функція f обмежена на відрізку $[a;b]$. Тоді, згідно із *твердженням 2.1* про точну верхню межу, існує

$$\sup_{x\in[a;b]} f(x) = M.$$

Покажемо, що існує таке число $\beta \in [\,a; b\,]$, що

$$\sup_{x\in[a;b]} f(x) = f(\beta) = M.$$

За властивістю точної верхньою межі для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує такий елемент $x_n \in [a;b]$, що

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M.$$

З обмеженої послідовності $\{x_n\}$ можна вилучити підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякого числа $\beta \in [a;b]$, причому

$$M - \frac{1}{n_k} \le f(x_{n_k}) \le M.$$

Спрямувавши n_k до ∞ в цій нерівності, дістанемо, що

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = M,$$

з другого боку, $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$. Враховуючи єдиність границі, маємо $f(\beta) = M$.

Друга частина теореми — про найменше значення — доводиться аналогічно.◄

8.3.3. Розв’язання вправи 8.1

Розгляньмо многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами

$$P_{2n+1}(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + ... + a_{2n+1}.$$

Нехай для визначеності $a_0 > 0$. При досить великих за абсолютною величиною від’ємних значеннях x знак многочлена $P_{2n+1}(x)$ буде від’ємним, а при досить великих додатних значеннях x — додатним. Оскільки многочлен є скрізь неперервною функцією, то знайдеться деяка точка, у якій він дорівнює нулеві.

8.3.4. Доведення теореми 8.5

Нехай для визначеності f зростає на відрізку $[a;b]$. Це означає, за означенням, що $f(x_1) < f(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$, тобто

$$f(x_1) \ne f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \ne x_2.$$

Звідси випливає, що функція f взаємно однозначна. В цьому разі для f існує обернена функція f^{-1}. Покажемо, що f^{-1} зростає на $[A;B]$.

Справді, нехай

$$y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2).$$

Якщо б $x_1 \ge x_2$, де

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2),$$

то, зі зростання функції f було б $y_1 \geq y_2$, що суперечить умові.
У разі спадної функції доведення аналогічне.

8.3.5. Доведення теореми 8.6

Нехай для визначеності f зростає на відрізку $[a;b]$. За 2-ю теоремою Ваєрштраса вона набуває на відрізку $[a;b]$ своїх найбільшого та найменшого значень B та $A, A < B$, відповідно.

Оскільки $a < b$, то завдяки зростанню функції f $A = f(a), B = f(b)$. За теоремою 8.4 функція f набуває всі проміжні значення між A та B, тобто $f([a;b]) = [A;B]$.

Покажімо, що f^{-1} неперервна на $[A;B]$. Задамо довільну точку $y_0 \in (A;B)$. Тоді $x_0 = f^{-1}(y_0)$, причому, завдяки зростанню функції f^{-1}, маємо

$$a < x_0 < b.$$

Виберімо довільне $\varepsilon > 0$, таке, що

$$a \leq x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leq b.$$

Позначмо

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon).$$

Тоді з останньої нерівності, завдяки зростанню функції f, маємо

$$A \leq y_1 \leq y_0 \leq y_2 \leq B.$$

Виберімо $\delta > 0$ таке, що

$$y_1 \leq y_0 - \delta \leq y_0 + \delta \leq y_2.$$

Якщо взяти y так, що

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

то тим більше $y_1 < y < y_2$, а отже, завдяки зростанню f^{-1}, правдива нерівність

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

Отже, для $\varepsilon > 0$ вказане таке $\delta > 0$, що

$$\left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \right| < \varepsilon, \forall y \in (y_0 - \delta; y_0 + \delta),$$

тобто функція f^{-1} неперервна в точці y_0.

Якщо $y_0 = A$ або $y_0 = B$, то аналогічно доводиться, що функція f^{-1} неперервна справа в точці A і неперервна зліва в точці B.

У разі спадної функції доведення аналогічне.