Модуль 9. Похідна та диференціал функції

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 9.1—9.4) і розширеному (розділи 9.1—9.5).

У модулі:

— запроваджено поняття похідної функції в точці, функції-похідної, диференціала і диференційовності функції;

— з'ясовано геометричний і фізичний зміст похідної функції в точці і диференціала;

— одержано правила й основні формули диференціювання;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) і 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

9.1. Похідна функції

9.1.1. Означення похідної функції

Розгляньмо функцію $f(x)$, означену в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0. Надамо фіксованому значенню аргументу x_0 приріст Δx такий, що $x = x_0 + \Delta x$ належить околові $U(x_0)$, тоді відповідний приріст функції

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 9.1. *Похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 звуть границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \overset{\text{den}}{=} f'(x_0).$$

Для похідної використовують ще позначення:

$$y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

З означення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 випливає, що

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Значенню аргументу x функції $f(x)$ відповідає певне значення (якщо воно існує) $f'(x)$. Тобто означено функцію

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Кажуть, що функція f «породжує» функцію f', а функція f' «походить» від функції f.

Якщо для деякого значення x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty,$$

то кажуть, що для цього значення x існує *нескінченна похідна*.

9.1.2. Знаходження похідної функції в точці

Дію відшукання похідної функції f звуть *диференціюванням*. Щоб знайти похідну від заданої функції $f(x), x \in X$, за означенням, треба:

1) надаючи фіксованому аргументові $x \in D(f)$ приріст Δx, обчислити значення функції $f(x + \Delta x)$;

2) знайти відповідний приріст функції

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) утворити відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) знайти границю цього відношення, коли $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Приклади.

1. Знайдімо похідну функції $y = x^2$ за означенням.

1) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2;$

2) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2;$$

3) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$

4) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

2. Покажімо, що функція $f'(x) = \sqrt{x}$ у точці $x_0 = 0$ має нескінченну похідну.

$$\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty.$$

Вправа 9.1. Знайти похідну в точці $x_0 = 0$ від функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання вправи 9.1 див. у *п. 9.5.1.*

Вправа 9.2. Виходячи з означення похідної, довести, що якщо періодична з періодом T функція $f(x)$ має похідну, то ця похідна є також T-періодичною функцією.

Розв'язання вправи 9.2 див. у *п. 9.5.2.*

Вправа 9.3. Виходячи з означення похідної, довести, що похідна парної функції, що має похідну, є функція непарна, а похідна непарної функції є функція парна.

Розв'язання вправи 9.3 див. у *п. 9.5.3.*

9.1.3. Однобічні похідні

Означення 9.2. Якщо функція f означена в деякому лівому (правому) околі точки x_0 й існує скінченна або нескінченна

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

то її звуть відповідно скінченною або нескінченною *лівою (правою) похідною функції* $f(x)$ *у точці* x_0 і позначають $f'_{-}(x_0)$ $(f'_{+}(x_0))$.

Праву і ліву похідні функції в точці звуть *однобічними похідними* функції в цій точці.

Користуючись поняттям однобічних границь функції, дістаємо:

Твердження 9.1. У точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$ тоді й лише тоді, коли існують права та ліва похідні і ці похідні рівні між собою

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0).$$

Зауваження 9.1. Існують функції, які мають у точці праву і ліву похідні, але не мають похідної в цій точці.

Вправа 9.4. Знайти однобічні похідні функції $f(x) = \left| x \right|$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання вправи 9.4 див. у *п. 9.5.4.*

9.1.4. Похідні основних елементарних функцій

1. Стала функція. Нехай $f(x) = C = \text{const}\, \forall x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$f'(x) = C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Показникова функція. Для функції $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$,

$$f'(x) = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$
$$= a^x \ln a \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тут, скористались наслідком із 2-ї визначної границі (див. *модуль 7*). Зокрема,

$$(e^x)' = e^x.$$

3. Степенева функція. Для функції $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, x \in D(f)$,

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} =$$
$$= x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in D(f).$$

Тут скористались наслідком із 2-ї визначної границі (див. *модуль 7*).
Зокрема, $x' = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Логарифмічна функція. Для функції $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{1}{x\ln a} \ \forall x > 0.$$

Тут скористались наслідком із 2-ї визначної границі (див. *модуль 7*).
Зокрема,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5. Тригонометричні функції.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \cos x \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\right) =$$
$$= -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тут скористались 1-ю визначною границею і неперервністю $\sin$.

9.2. Диференційовність функції. Диференціал функції

9.2.1. Диференційовність функції

Розгляньмо функцію $f(x)$, яка означена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення 9.3. Функцію $f(x)$ звуть *диференційовною в точці* x_0, якщо її приріст у цій точці

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

можна зобразити як

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

де A — деяке дійсне число, $o(\Delta x)$ — н. м. ф. вищого порядку мализни, ніж Δx, коли $\Delta x \to 0$.

Умову диференційовності можна ще переписати як

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$.

Теорема 9.1. Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.

► $\boxed{\Rightarrow}$. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0. Доведімо, що в цій точці існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$. З диференційовності функції $f(x)$ у точці x_0 випливає, що приріст функції, відповідний приростові аргументу

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

звідки

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

де A для заданої точки x_0 стала (не залежить від Δx), а $\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Із властивості функції, що має границю, випливає, що

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай у функції $f(x)$ у точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)$, тобто існує скінченна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Тому

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

А це і є умова диференційовності, причому $f'(x_0) = A$. ◄

Означення 9.4. Функцію f звуть *диференційовною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Множину всіх диференційовних в інтервалі $(a;b)$ функцій позначатимемо як $D(a;b)$.

Теорема 9.2 (***необхідна умова диференційовності***). Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.

► Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто в цій точці

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де $A = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$; $\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. З цієї рівності випливає, що $\Delta f(x_0) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. А це означає неперервність функції $f(x)$ у точці x_0. ◄

Зауваження 9.2. **1.** Зворотне твердження неправильне: з неперервності функції f у деякій точці не випливає диференційовність її в цій точці.

Так, функція $f(x) = \left|x\right|$ неперервна в точці $x_0 = 0$, оскільки $\Delta y = |\Delta x|$, і тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

З розв'язання вправи 9.4 випливає, що функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$, отже, за теоремою 9.1 не є диференційовною в цій точці.

2. Правдиве включення

$$D(a;b) \subset C(a;b).$$

9.2.2. Диференціал функції

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто має скінченну похідну $f'(x_0)$ і

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

Означення 9.5. *Диференціалом функції* $f(x)$ *у точці* x_0 звуть головну, лінійну щодо Δx, частину приросту диференційовної функції $f(x)$

$$f'(x_0)\Delta x \stackrel{\text{den}}{=} df(x_0).$$

Знайдімо, приміром, диференціал функції $f(x) = x$. Оскільки $f'(x) = x' = 1$, то

$$df = dx = \Delta x,$$

тобто диференціал незалежної змінної дорівнює приростові цієї змінної і формулу для обчислення диференціала можна ще записати так:

$$df = f'(x)dx.$$

З неї випливає рівність $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$. Отже, позначення $\dfrac{df}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів df та dx.

9.3. Геометричний і фізичний зміст похідної та диференціала

9.3.1. Дотичної до кривої

Розгляньмо задачу будування дотичної до довільної плоскої кривої. Нехай $f(x)$ неперервна функція, означена в деякому околі точки x_0. Розгляньмо дві точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ графіка цієї функції (рис. 9.1).

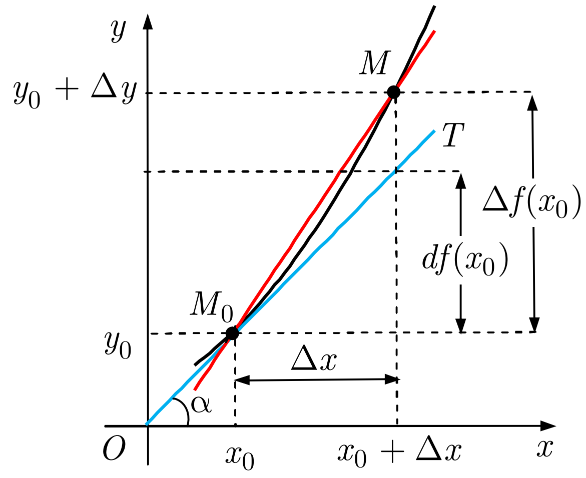


Рис. 9.1

Через них проходить єдина пряма — січна

$$M_0M : \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} \Leftrightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Кутовий коефіцієнт січної

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо точка M рухається по кривій до точки M_0, то січна повертається навколо точки M_0 і прямує до деякого граничного положення M_0T.

Означення 9.6. *Дотичною до кривої в точці* M_0 звуть пряму M_0T, що є граничним положенням січної M_0M, коли точка M прямує по кривій до точки M_0.

Січна прямуватиме до граничного положення, відмінного від вертикальної прямої, тоді й лише тоді, коли існує скінченна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

яка є *кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції* $f(x)$ *у точці* x_0.

Позначавши ординату дотичної через $y_{\text{дот}}$, рівняння дотичної перепишімо у вигляді

$$y_{\text{дот}} - y_0 = f'(x_0)\Delta x = dy(x_0).$$

Зауваження 9.3. **1.** Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α — кут нахилу дотичної до осі Ox.

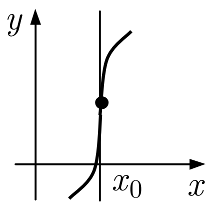
2. Диференціал функції дорівнює приростові ординати дотичної.

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину звуть кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.

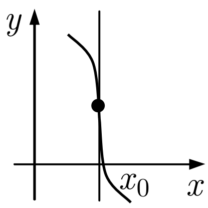
Означення 9.7. *Функцію* $y = f(x)$ звуть *гладкою* в інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна разом зі своєю похідною в цьому інтервалі. Криву $y = f(x)$ звуть *гладкою* в інтервалі $(a;b)$, тобто в кожній точці гладкої кривої можна побудувати дотичну до неї.

У разі функції $f(x)$ із нескінченною похідною в точці x_0 можливі випадки:

1) $f'(x_0) = +\infty$ (рис. 9.2);
2) $f'(x_0) = -\infty$ (рис. 9.3);
3) $f'_-(x_0) = -\infty, f'_+(x_0) = +\infty$ (рис. 9.4);
4) $f'_-(x_0) = +\infty, f'_+(x_0) = -\infty$ (рис. 9.5).



$f'(x_0) = +\infty$
Рис. 9.2



$f'(x_0) = -\infty$
Рис. 9.3

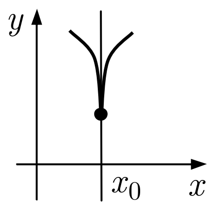


Рис. 9.4

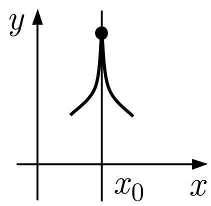


Рис. 9.5

Якщо точка M_0 — точка злому графіка функції (рис. 9.6 та 9.7), тобто в такій точці не існує скінченної чи нескінченної похідної, то в ній не можна провести дотичну.

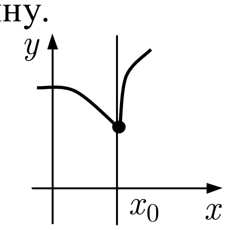


Рис. 9.6

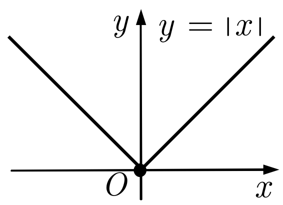


Рис. 9.7

9.3.2. Нормаль до кривої

Перетворюючи рівняння січної до вигляду

$$\frac{y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

і спрямовуючи Δx до нуля, дістанемо, що нескінченній похідній відповідає вертикальна дотична з рівнянням $x = x_0$.

Означення 9.8. Пряму, що перпендикулярна до дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0; f(x_0))$, звуть *нормаллю до кривої*.

Оскільки кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані співвідношенням $k_1 k_2 = -1$, то, якщо $k_{\text{дот}} = f'(x_0) \neq 0$, то $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і рівняння нормалі матиме вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ — вертикальна пряма $x = x_0$, то нормаль буде горизонтальною прямою $y = y_0$; у разі горизонтальної дотичної $y = y_0$ — нормаль матиме рівняння $x = x_0$.

9.3.3. Фізичний зміст похідної та диференціала

Нехай значення функції f та її аргумент $x \in [a; b]$ є деякими фізичними величинами. Відношення

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

де $\Delta x = x - x_0; \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), x_0 + \Delta x \in [a; b]$ звуть *середньою швидкістю змінювання* величини $f(x)$ щодо величини x на відрізку з кінцями x та $x + \Delta x$, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

— *швидкістю змінювання* величини $f(x)$ щодо величини x у точці x_0.

Застосування похідної до вивчення фізичних явищ ґрунтується на її тлумаченні як швидкості змінювання однієї величини щодо іншої.

У разі існування цієї швидкості (тобто в разі існування похідної функції $f(x)$ у точці x_0) приріст

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

Це означає, що приріст Δf лінійно залежить від приросту Δx змінної x із точністю до нескінченно малої вищого порядку, ніж Δx.

Застосування диференціала ґрунтується на тому, що замінювання приросту функції її диференціалом дозволяє замінити будь-яку диференційовну в точці x_0 функцію лінійною функцією в досить малому околі точки x_0, тобто в «малому» фізичний процес, який описують функцією f, плине майже лінійно.

1. Швидкість прямолінійного руху. Нехай матеріальна точка M рухається вздовж деякої прямої за законом

$$s = s(t),$$

де s — довжина шляху, який пройшла точка від початкової точки M_0; t — час. Нехай M — положення точки в момент t, а M' — в момент $t + \Delta t$ і Δs — віддаль між точками M та M', тобто

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

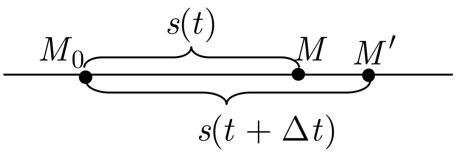


Рис. 9.8

Відношення

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \stackrel{\text{den}}{=} v_{\text{сер}}$$

звуть числовим значенням середньої швидкості руху на ділянці від M до M', а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \stackrel{\text{den}}{=} v(t_0)$$

швидкістю ($\Leftrightarrow$ миттєвою швидкістю) у момент t. Отже,

$$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}.}$$

Диференціал

$$ds = v\Delta t$$

дорівнює шляху, який би пройшла точка за проміжок часу Δt, починаючи з моменту t_0, якби рух на цій ділянці був би рівномірний зі швидкістю v. Цей шлях відрізняється від справжнього шляху Δs на нескінченно малу вищого порядку мализни, ніж Δt, коли $\Delta t \to 0$.

2. Сила струму. Нехай

$$q = q(t)$$

— кількість заряду, що протікає через поперечний переріз провідника; t — час; Δt — деякий проміжок часу;

$$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$$

— кількість заряду, що протікає через переріз за проміжок часу Δt.

Тоді відношення

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \stackrel{\text{den}}{=} I_{\text{сер}}$$

звуть *середньою силою струму* за проміжок часу Δt, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \stackrel{\text{den}}{=} I$$

— *миттєвою силою струму*. Отже,

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}.}$$

Диференціал

$$dq = I\Delta t$$

дорівнює кількості заряду, який б протік через поперечний переріз провідника за проміжок Δt, якби сила струму була сталою і рівною $I(t_0)$.

3. Густина неоднорідного стрижня. Нехай задано неоднорідний стрижень завдовжки l і нехай

$$m = m(x)$$

— маса частини стрижня завдовжки $x, 0 \le x \le l$ (рис. 9.9).

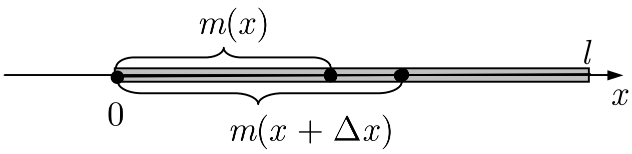


Рис. 9.9

Тоді

$$\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$$

— маса частини стрижня, обмеженого точками, розташованими на віддалі x та $x + \Delta x$ від вибраного кінця.

Величину

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \stackrel{\text{den}}{=} \rho_{\text{сер}}$$

звуть *середньою лінійною густиною стрижня* на вказаній ділянці, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \rho_{\text{сер}} = \rho$$

— *лінійною густиною стрижня в точці*.

Отже,

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dx}.}$$

Якщо густина ρ стала, то стрижень є однорідним.

Для довільного неоднорідного стрижня диференціал

$$dm = \rho \Delta x$$

дорівнює масі однорідного стрижня завдовжки Δx зі сталою густиною ρ.

9.4. Правила диференціювання

Теорема 9.3. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовні в точці x, то в цій точці диференційовні їхні сума $u(x) + v(x)$, добуток $u(x)v(x)$ та частка $\frac{u(x)}{v(x)}$ (за умови, що $v(x) \neq 0$), причому

$$(u + v)' = u' + v' \Leftrightarrow d(u + v) = du + dv;$$
$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow d(uv) = vdu + udv;$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \Leftrightarrow d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \ (v \neq 0).$$

►Доведімо, приміром, формулу для похідної добутку. З диференційовності функцій u та v випливає існування скінченних похідних u' та v'.

За означенням

$$(u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$
$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

на підставі диференційовності, а отже, й неперервності функцій $u(x)$ та $v(x)$.

Помножмо одержану формулу на dx і врахуємо зв'язок диференціала функції з похідною:

$$(uv)'dx = vu'dx + uv'dx,$$
$$d(uv) = vdu + udv. \blacktriangleleft$$

Наслідки.

1. Нехай функція $u(x)$ диференційовна в точці x, тоді функція $Cu(x)$ також диференційовна в точці x, причому

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

2. Нехай функції $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ диференційовні в точці x, тоді лінійна комбінація цих функцій також диференційовна в точці x, причому

$$(C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + ... + C_nu_n(x))' =$$
$$= C_1u_1'(x) + C_2u_2'(x) + ... + C_nu_n'(x) \Rightarrow$$
$$d(C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + ... + C_nu_n(x)) =$$
$$= C_1du_1(x) + C_2du_2(x) + ... + C_ndu_n(x).$$

3. Правдиві формули

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

► Справді,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$
$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x). \blacktriangleleft$$

9.5. Додаткові відомості

9.5.1. Розв’язання вправи 9.1

$$\Delta f(x) = f(\Delta x) - f(0) = \Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x} - 0 = \Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x};$$
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x};$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = \left|\begin{array}{l}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{array}\right| = 0.$$

9.5.2. Розв'язання вправи 9.2

Нехай $x_0 \in D(f)$, а, отже, й $x_0 \in D(f')$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Розгляньмо

$$f'(x_0 + T) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + T + \Delta x) - f(x_0 + T)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \;\; \forall x_0 \in D(f).$$

Отже, функція f' періодична з періодом T.

9.5.3. Розв'язання вправи 9.3

1. Нехай функція f — парна. Доведімо, що функція f' — непарна.

Нехай $x_0, (-x_0) \in D(f)$, а, отже, й $x_0, (-x_0) \in D(f')$. Тоді

$$f'(-x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x_0 + \Delta x) - f(-x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0) \;\; \forall x_0 \in D(f).$$

2. Так само доводиться, що похідна непарної функція є парною функцією.

9.5.4. Розв'язання вправи 9.4

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\left|\Delta x + 0\right| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\left|\Delta x + 0\right| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отже, для функції $f(x) = \left|x\right|$ однобічні похідні в точці $x_0 = 0$ існують, але не рівні між собою, тобто в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = \left|x\right|$ похідної не має.