Модуль 10. Диференціювання функцій

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 10.1—10.4) і розширеному (розділи 10.1—10.5).

У модулі:

— одержано правила диференціювання складеної функції, оберненої функції і логарифмічного диференціювання;

— встановлено інваріантність форми першого диференціала;

— виведено формули диференціювання гіперболічних, обернених гіперболічних та обернених тригонометричних функцій;

— виписано правила і основні формули диференціювання функції, заданої явно, неявно та параметрично.

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) і 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

10.1. Диференціювання складеної та оберненої функцій

10.1.1. Диференціювання складеної функції

Нехай функція $u = \varphi(x)$ задана в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0, а функція $y = f(u)$ — в деякому околі $V(u_0)$ точки $u_0 = \varphi(x_0)$, причому $f(U(x_0)) \subset V(u_0)$ і, отже, в околі точки x_0 визначено складену функцію

$$y = f(\varphi(x)).$$

Теорема 10.1. Якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ диференційовна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ також диференційовна в точці x_0 та

$$y'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0), u = \varphi(x).$$

Доведення теореми 10.1 див. у *п. 10.5.1.*

Зауваження 10.1. У разі диференційовності функції $u = \varphi(x)$ в околі точки x_0, а функції $y = f(u)$ в околі точки $u_0 = \varphi(x_0)$, правдива формула для похідної складеної функції:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u u'_x.$$

Приклад. Обчислімо похідну функції $f(x) = \sin(2x + 3)$.
Функція f є складеною функцією аргументу x:

$$f(x) = \sin u(x), u(x) = 2x + 3.$$

За правилом диференціювання складеної функції маємо

$$f'_x = (\sin u)'_u u'_x = \cos u \cdot 2 = 2\cos(2x + 3).$$

10.1.2. Інваріантність форми першого диференціала

Якщо $f(u)$ — диференційовна функція незалежної змінної u, то

$$df = f'(u)du.$$

У разі, якщо аргумент u диференційовної функції $f(u)$ є диференційовною функцією незалежної змінної x, то $f(u(x))$ є складеною функцією аргументу x.

Отже,

$$df = [f(u(x))]'_x dx = f'(u)u'(x)dx,$$

де скористались правилом диференціювання складеної функції.

Оскільки $u'(x)dx = du$, то

$$df = f'(u)du.$$

Отже, диференціал функції $f(u)$ визначають однією і тою самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи є функцією іншого аргументу.

Цю властивість диференціала звуть *інваріантністю форми першого диференціала*.

10.1.3. Похідні гіперболічних та обернених гіперболічних функцій

Покажімо, що з означень гіперболічних та обернених гіперболічних функцій і правила диференціювання складеної функції випливає:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;\ \ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};\ \ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \ (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1.$$

► Справді,

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{(x + (1+x^2)^{1/2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \dfrac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+x)'}{1+x} - \frac{(1-x)'}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1. ◄$$

10.1.4. Диференціювання оберненої функції

Нехай функції $y = f(x)$ має обернену функція $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Теорема 10.2. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну

$f'(x_0) \neq 0$, то обернена функція $x = \varphi(y)$ також має у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ похідну, причому

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Якщо умови теореми 10.2 виконано в деякому околі точок x_0 та $y_0 = f(x_0)$, то

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} \Leftrightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

10.1.5. Похідні обернених тригонометричних функцій

Знайдімо похідні обернених тригонометричних функцій. Нехай

$$y = \arcsin x, x \in [-1;1], y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Звідси $f^{-1}(y) = \sin y = x$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1),$$

оскільки $\cos y > 0$, якщо $|y| < \frac{\pi}{2}$.

Оскільки

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

то

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1).$$

Нехай

$$y = f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

Тоді $f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y = x, |y| < \frac{\pi}{2}$. Звідси

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Оскільки $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

10.1.6. Логарифмічне диференціювання

Правило диференціювання складеної функції дозволяє в деяких випадках значно спростити задачу знаходження її похідної.

Нехай $y = f(x) > 0$ — деяка функція. Утворімо функцію $\ln y = \ln f(x)$ і обчислімо її похідну

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x). \qquad (10.1)$$

Похідну від натурального логарифму функції звуть *логарифмічною похідною*.
З формули (10.1), випливає правило логарифмічного диференціювання.

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))'.$$

Логарифмічне диференціювання спрощує знаходження похідної:
1) степенево-показникових функцій $(u(x))^{v(x)}$;
2) великої кількості співмножників.

Приклади.

Знайдімо похідні функцій:

1) $f(x) = x^x, x > 0$; 2) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$.

❍ 1) $f'(x) = x^x(\ln x^x)' = x^x(x\ln x)' = x^x\left(\ln x + x\dfrac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$.

2) $f'(x) = f(x)\left(\ln \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\right)' =$

$$= f(x)\big(2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+4)\big)' =$$
$$= \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}\right). \bullet$$

10.2. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

На практиці частіше всього доводиться шукати похідні елементарних функцій $f(u)$, аргумент яких є складеною функцією незалежної змінної x.

I. $(Cu)' = Cu', C = \text{const}$.

II. $(u+v)' = u' + v'$.

III. $(uv)' = u'v + uv'$.

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \ (v \neq 0)$.

V. $[f(u(x))]'_x = f'_u(u)u'_x(x), u = u(x)$.

VI. $y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y) \Rightarrow y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

VII. $(f(x))' = f(x)(\ln f(x))', f(x) > 0$.

Функція	Похідна	Функція	Похідна

C	0	$\arcsin u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$u^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$\arccos u$	$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$a^u, 0 < a \neq 1$	$a^u \ln a \cdot u'$	$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
e^u	$e^u u'$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\log_a u$, $0 < a \neq 1$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$	$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	$\operatorname{th} u$	$\dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	$\operatorname{cth} u$	$-\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$
$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\operatorname{arsh} u = \ln(u+\sqrt{1+u^2})$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$\operatorname{arth} u = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}$	$\dfrac{u'}{1-u^2}$

10.3. Диференціювання неявних функцій

Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0.$$

Якщо в рівнянні $F(x, y) = 0$ під y розуміти функцію $y(x)$, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$F(x, y(x)) = 0, \forall x \in X.$$

Продиференціюймо його за x, вважаючи, що y є функцією x, і дістанемо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y.

Розв'язуючи його щодо y', знайдемо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно

$$y'_x = g(x, y).$$

Приклад. Знайдімо похідну від функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$.

❍ Продиференціюємо рівняння за змінною x:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Отже,

$$y' = -\frac{x}{y}. \bullet$$

10.4. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Нехай функцію $y(x)$ задано параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Припустімо, що функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні для будь-якого $t \in T$ й $x'(t) \neq 0$. Крім того, вважатимемо, що функція $x = x(t)$ має обернену функцію $t(x)$, яка також диференційовна. Тоді функцію $y = y(x)$, задану параметрично можна розглядати як складену функцію

$$x = x(t), t = t(x),$$

де t — проміжний аргумент.

Тоді

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отже, похідна функції $y = y(x)$, заданої параметрично теж задається параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}. \end{cases}$$

Приклад. Знайдімо похідну від параметрично заданої функції

$$y : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

❍ $$y'_x : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y'_x = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \end{cases} \bullet$$

10.5. Додаткові відомості

10.5.1. Доведення теореми 10.1

Оскільки функція $y = f(u)$ диференційовна в точці u_0, то

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u, \qquad (10.1)$$

де $\alpha(\Delta u) \to 0$, коли $\Delta u \to 0$.

Функція $\alpha(\Delta u)$ може бути і неозначеною при $\Delta u = 0$. Доозначмо її, покладаючи $\alpha(0) = 0$. Тоді $\alpha(\Delta u)$ буде неперервною при $\Delta u = 0$.

Функція $u = \varphi(x)$ диференційовна в точці x_0, тому

$$\Delta u = \varphi'(x_0)\Delta x + \alpha_1(\Delta x)\Delta x, \qquad (10.2)$$

де $\alpha_1(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Підставивши значення Δu з формули (10.2) у формулу (10.1), дістанемо

$$\Delta y = (f'(u_0) + \alpha)(\varphi'(x_0) + \alpha_1)\Delta x =$$
$$= f'(u_0)\varphi'(x_0)\Delta x + (\alpha_1 f'(u_0) + \alpha\varphi'(x_0))\Delta x + \alpha\alpha_1\Delta x.$$

Розділивши цю рівність на Δx і спрямувавши Δx до нуля, дістанемо

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0),$$

оскільки $\alpha_1 f'(u_0) + \alpha\varphi'(x_0)$ та $\alpha\alpha_1$ є нескінченно малими функціями, коли $\Delta x \to 0$.

10.5.2. Доведення теореми 10.2

Надаймо аргументові y_0 оберненої функції $x = \varphi(y)$ деякий приріст $\Delta y \neq 0$, який, викличе приріст функції $\Delta x \neq 0$ (на підставі строгої монотонності функції $\varphi(y)$). Отже,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Спрямувавши Δy до нуля, дістаємо

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Оскільки функції $y = f(x)$ неперервна, то обернена функція $x = \varphi(y)$ також неперервна, тобто

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$