Модуль 11. Похідні та диференціали вищих порядків

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 11.1—11.4) і розширеному (розділи 11.1—11.5).

У модулі:

— означено похідні і диференціали вищих порядків;

— встановлено формули похідних і диференціалів від суми і добутку функцій;

— подано формули для похідних вищих порядків функції, заданої параметрично і вказано спосіб знаходження похідних вищих порядків функції, заданої неявно;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправою та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) і 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

11.1. Похідні вищих порядків

11.1.1. Означення похідних вищих порядків

Розгляньмо диференційовну в кожній точці $x \in X$ функцію $f(x)$.

Тоді її похідна $f'(x)$, яку зватимемо *похідною 1-го порядку* ($\Leftrightarrow$*першою похідною*), також є функцією від x. Якщо функція $f'(x)$ диференційовна, то можна означити її похідну

$$(f'(x))' \overset{\text{den}}{=} f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

яку звуть похідною 2-го порядку ($\Leftrightarrow$*другою похідною*) *функції* f.

Означення 11.1. *Похідною* n*-го порядку* функції f звуть похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \overset{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))', n = 1, 2, \ldots,$$
$$f^{(0)}(x) \equiv f(x).$$

Зауваження 11.1. 1. Похідні 1-го, 2-го та 3-го порядку позначають штрихами, приміром, $f'(x), f''(x), f'''(x)$.
2. Починаючи з похідної 4-го порядку, похідні позначають цифрами (римськими або арабськими, взятими в дужки). Приміром, $f^{(4)}(x) \equiv f^{\mathrm{IV}}(x)$.

Функцію $f(x)$ звуть n *разів диференційовною* в точці $x \in X$, якщо в цій точці функція має всі похідні до n-го порядку включно.

Множину всіх функцій f, означених в інтервалі $(a;b)$, які мають неперервну похідну n-го порядку, позначають $C^n(a;b)$.

Функцію f, що має похідні будь-якого порядку в кожній точці інтервалу $(a;b)$, звуть *нескінченно диференційовною* в $(a;b)$ і пишуть $f \in C^\infty(a;b)$. Приміром, функції $e^x, \sin x, \cos x$ нескінченно диференційовні на $(-\infty;+\infty)$.

11.1.2. Похідні вищих порядків від основних елементарних функцій

1. Степенева функція $x^m, m \in \mathbb{N}$.

$$(x^m)' = mx^{m-1}; (x^m)'' = m(m-1)x^{m-2}, \ldots,$$
$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}, n \le m.$$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{n!}x^{m-n}, & n \le m, \\ 0, & n > m, \end{cases} n \in \mathbb{N}.$$

2. Функція $\dfrac{1}{x-a}, a = \text{const}$.

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)' = ((x-a)^{-1})' = (-1)(x-a)^{-2};$$

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)'' = ((-1)(x-a)^{-2}) = (-1)(-2)(x-a)^{-3};\ldots$$

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}, n \in \mathbb{N}.$$

3. Логарифмічна функція $\ln(x+a)$.

$$(\ln(x+a))' = \frac{1}{x+a};(\ln(x+a))'' = -\frac{1}{(x+a)^2};\ldots$$

$$(\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

4. Показникова функція $e^{ax}, a = \text{const}$.

$$(e^{ax})' = ae^{ax};(e^{ax})'' = a^2e^{ax};\ldots$$

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, n \in \mathbb{N}.$$

5. Тригонометричні функції $\sin x$ та $\cos x$.

$$(\sin x)' = \cos x;(\sin x)'' = -\sin x;(\sin x)''' = -\cos x;\ldots,$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N}.$$

$$(\cos x)' = -\sin x;(\cos x)'' = -\cos x;(\cos x)''' = \sin x;\ldots$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N}.$$

Подані формули можна обґрунтувати методом математичної індукції.

Вправа 11.1. Довести правильність формули

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{N}.$$

Розв’язання вправи 11.1 див. у *п. 11.5.1.*

11.1.3. Механічний зміст другої похідної

Нехай $s = s(t)$ — закон руху матеріальної точки, тоді перша похідна визначає швидкість руху $v = s'(t)$. Друга похідна є швидкість змінення швидкості руху, тобто прискорення

$$a = \frac{dv}{dt} = s''(t).$$

11.1.4. Похідні вищих порядків суми і добутку функцій

Твердження 11.1. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні n-го порядку в точці x, то функції $u(x) \pm v(x)$ та $u(x)v(x)$ також мають похідні n-го порядку в цій точці, причому

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x);$$

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x),$$
$$u^{(0)}(x) = u, v^{(0)}(x) = v(x), n \in \mathbb{N}.$$

або

$$(u(x)v(x))^{(n)} =$$
$$= C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n v^{(n)},$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Формулу для $(uv)^{(n)}$ звуть *Лейбніцовою*. Вона нагадує формулу Ньютоновою, лише замість степенів стоять порядки похідних.

Наслідок. Якщо функція f є n разів диференційовною в точці x, а $C = \text{const}$, то

$$(Cf(x))^{(n)} = Cf^{(n)}(x), C = \text{const}, n \in \mathbb{N}.$$

Приклад. Користуючись Лейбніцовою формулою, знайдімо $y^{(2006)}$ від функції $y = x^2 e^x$.

❍ $$y^{(2006)} = (\underbrace{e^x}_{u}\underbrace{x^2}_{v})^{(2006)} = (e^x)^{(2006)} x^2 + \frac{2006}{1!}(e^x)^{(2005)}(x^2)' +$$
$$+ \frac{2006 \cdot 2005}{2!}(e^x)^{(2004)}(x^2)'' + 0 + \ldots + 0 =$$
$$= e^x x^2 + 4012 e^x x + 2006 \cdot 2005 e^x. \bullet$$

11.2. Диференціали вищих порядків

11.2.1. Означення і властивості диференціалів вищих порядків

Розгляньмо диференційовну функцію $f(x)$. Диференціал цієї функції ($\Leftrightarrow$ диференціал 1-го порядку)

$$df = f'(x)dx$$

залежить від x та dx, причому $dx = \Delta x$ від x не залежить.

Диференціалом 2-го порядку ($\Leftrightarrow$ *другим диференціалом*) функції $f(x)$ звуть диференціал від диференціала 1-го порядку і позначають

$$d^2 f \overset{\text{def}}{=} d(df).$$

Означення 11.2. *Диференціалом* n*-го порядку* ($\Leftrightarrow$ n*-м диференціалом*) функції $f(x)$ звуть диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку і позначають

$$d^n f \overset{\text{den}}{=} d(d^{n-1}f), n \in \mathbb{N},$$
$$d^0 f = f.$$

Із властивостей похідних вищих порядків випливає, що:

1) $d^n(f_1 + f_2) = d^n f_1 + d^n f_2$;

2) $d^n(uv) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u \cdot d^k v$;

3) $d^n(Cf) = Cd^n f, C = \text{const}, n \in \mathbb{N}$.

11.2.3. Формули обчислення диференціалів вищих порядків

Нехай $f(x)$ є функцією незалежної змінної x, що має диференціали будь-якого порядку. Тоді

$$df(x) = f'(x)dx,$$

де $dx = \Delta x$ є сталим. За означенням

$$d^2 f \overset{\text{def}}{=} d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Отже,

$$d^2 f = f''(x)(dx)^2 \overset{\text{den}}{=} f''(x)dx^2.$$

Аналогічно

$$d^3 f = d(d^2 f) = d(f''(x)(dx)^2) = d(f''(x))(dx)^2 =$$
$$= (f'''(x)dx)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 \overset{\text{den}}{=} f'''(x)dx^3.$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, n \in \mathbb{N}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Виведімо тепер формули для обчислення диференціалів вищих порядків у разі, коли аргумент x є диференційовною функцією $x = \varphi(t)$ деякої змінної t. Для одного й того самого Δt, але різних t (а, отже, й різних x) прирости Δx різні, тобто в цьому разі $dx = \Delta x$ не можна вважати незалежним від x, оскільки dx — диференціал функції

$$dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt.$$

Тому

$$d^2f(x) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d^2x =$$
$$= (f''(x)dx)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Отже, диференціали 2-го (і вище) порядку вже не мають властивості інваріантності — їхній вигляд залежить від того, чи є аргумент x незалежною змінною чи диференційовною функцією іншої змінної.

Зауваження 11.2. Якщо $\varphi(t) = at + b, a, b = \text{const}$, то інваріантність форми диференціала зберігається.

11.3. Похідні вищих порядків від функцій, заданих неявно

Розгляньмо функцію $y = y(x)$, задану неявно рівнянням
$$F(x, y) = 0.$$

Диференціюючи це рівняння за змінною x і розв'язуючи одержане рівняння щодо y', знайдемо похідну 1-го порядку
$$y' = g_1(x, y).$$

Диференціюючи за x першу похідну, дістанемо похідну 2-го порядку від неявної функції, що виражається через x, y та y'. Підставляючи вже знайдене значення y' у вираз для похідної 2-го порядку, виразимо y'' через x та y
$$y'' = g_2(x, y).$$

Так само знаходять і похідні вищих порядків.

Приклад. Знайдімо похідну 3-го порядку від функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$.

❍ Знайдімо першу похідну функції y:
$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Знайдімо другу похідну функції y:
$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - y'x}{y^2} = \left| y' = -\frac{x}{y} \right| = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = \left| x^2 + y^2 = a^2 \right| = -\frac{a^2}{y^3}.$$

Знайдімо третю похідну функції y:
$$y''' = \left(-\frac{a^2}{y^3}\right)'_x = \frac{3a^2y'}{y^4} = \frac{3a^2}{y^4}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3a^2x}{y^5}. \bullet$$

11.4. Похідні вищих порядків від функцій, заданих параметрично

Розгляньмо функцію $y = y(x)$ задану параметрично рівняннями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Похідна такої функції також є функцією заданою параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}. \end{cases}$$

Оскільки

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x,$$

то

$$y : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x : \begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases} \Rightarrow y''_{xx} : \begin{cases} x = x(t), \\ y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \end{cases} \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(n)}_{x^n} : \begin{cases} x = x(t), \\ y^{(n)}_{x^n} = \dfrac{(y^{(n-1)}_{x^{n-1}})'_t}{x'_t}. \end{cases}$$

Приклад. Знайдімо похідну 3-го порядку функції y, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, t \in [0; 2\pi). \end{cases}$

❍ $$y'_x : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y'_x = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t; \end{cases}$$

$$y''_{xx} : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y''_{xx} = \dfrac{(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t)'_t}{(a\cos t)'_t} = \dfrac{b}{a\sin^2 t \cdot (-a\sin t)} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}; \end{cases}$$

$$y'''_{x^3} : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y'''_{x^3} = \dfrac{\left(-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}\right)'}{(a\cos t)'} = -\dfrac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}. \end{cases}$$ ●

11.5. Додаткові відомості

11.5.1. Розв’язання вправи 11.1

Застосуймо метод математичної індукції.

1. Формула правдива для $n = 1$ та $n = 2$:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Припустімо, що формула правдива для $n = k$:

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Доведімо, що вона правдива для $n = k + 1$:

$$(\sin x)^{(k+1)} = \left(\sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, за принципом математичної індукції формула правдива для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.