Модуль 12. Основні теореми диференціального числення

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 12.1—12.3) і розширеному (розділи 12.1—12.4).

У модулі:

— розглянуто важливі теореми диференціального числення: теорему Ферма (необхідну умову існування локального екстремуму) та теореми про середнє значення (теорема Роля, теорема Лаґранжа, теорема Коші);

— обґрунтовано застосування ефективного засобу обчислення границь — правил Бернуллі — Лопіталя;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) і 30 варіантів індивідуальних завдань.

12.1. Теорема Ферма

Означення 12.1.

Точку x_0 звуть *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції $f(x)$, якщо існує δ-окіл точки x_0, такий, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$
$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Значення $f(x_0)$ звуть *локальним максимумом* (*мінімумом*) функції.
Точки максимуму і мінімуму звуть *точками екстремуму функції*, а максимуми та мінімуми функції звуть *екстремумами функції*.

На рис. 12.1 x_1 та x_3 — точки локального мінімуму, а точка x_2 — точка локального максимуму функції f.

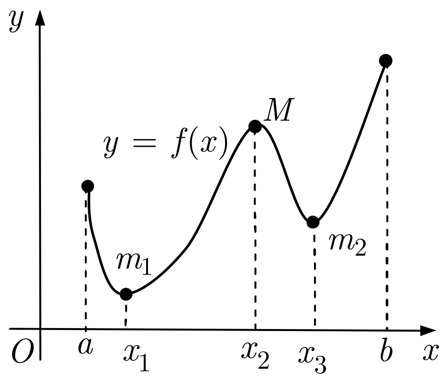

Рис. 12.1

Зауваження 12.1.

1. Екстремуми функції мають лише локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно із близькими до нього значеннями.
2. Якщо функція f має на відрізку $[a;b]$ декілька максимумів і мінімумів, то може трапитись так, що деякий максимум функції менше за її деякий мінімум.

Теорема 12.1

(***Ферма, необхідна умова існування локального екстремуму***). Якщо функція означена в деякому околі точки, досягає в цій точці екстремуму і має скінченну похідну, то ця похідна рівна нулеві.

Доведення теореми 12.1 див. у *п. 12.4.1.*

Зауваження 12.1.

Можна довести, що в точці, у якій функція досягає свого екстремуму не може існувати нескінченна похідна певного знаку.
Тому в точці x_0, у якій досягається екстремум, можливі випадки:

$$1)\ f'(x_0) = 0; 2)\ f'(x_0) = \infty; 3)\ \nexists f'(x_0).$$

Їх реалізують функції (рис. 12.2):

1) $f_1(x) = x^2, f_1'(0) = 0;$

2) $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2}, f_2'(0) = \infty;$

3) $f_3(x) = |x|, \nexists f_3'(0).$

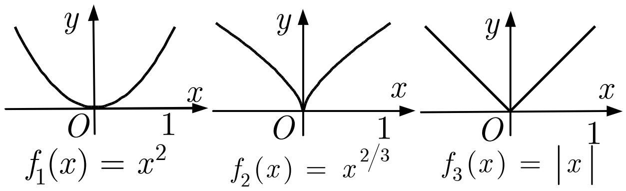

Рис. 12.2

12.2. Теореми про середнє значення

12.2.1. Ролєва теорема

Диференційовним в інтервалі функціям притаманні спільні властивості — теореми про середнє значення.

Теорема 12.2 (***Роля***). Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a; b)$;

3) на кінцях відрізку $[a; b]$ набуває рівних значень $f(a) = f(b)$,

то в інтервалі $(a; b)$ існує принаймні одна точка ξ, у якій похідна функції дорівнює нулеві (рис. 12.3), тобто

$$f'(\xi) = 0, \xi \in (a; b).$$

Доведення теореми 12.2 див. у *п. 12.4.2.*

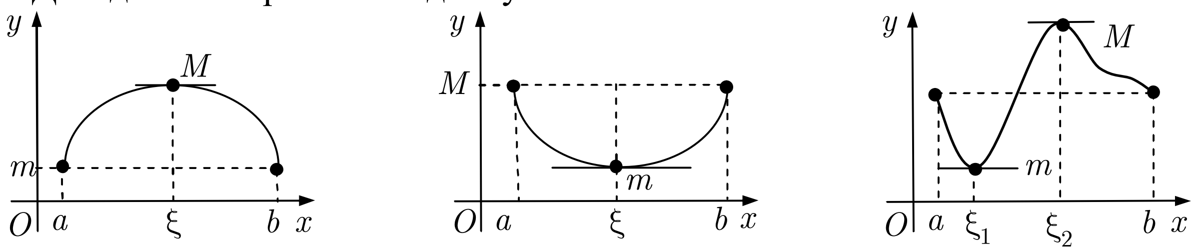

Рис. 12.3

Зауваження 12.2. **1** (геометричний зміст Ролєвої теореми). Якщо неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$ функція f набуває на кінцях цього відрізку рівних значень, то на графіку цієї функції знайдеться принаймні одна така точка з абсцисою $x = \xi$, у якій дотична паралельна осі Ox (на рис. 12.4 таких точок дві).

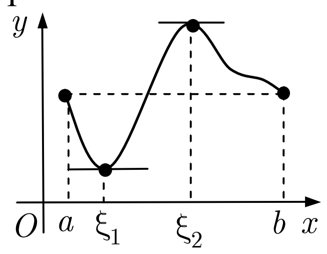

Рис. 12.4

2. Вимогу диференційовності можна послабити до вимоги існування скінченної або нескінченної певного знаку похідної. Приміром, функція (рис. 12.5)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\le x\le 2,\\ -\sqrt{1-(x+1)^2}, & -2\le x<0.\end{cases}$$

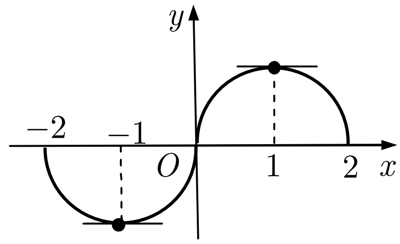

Рис. 12.5

3. Усі вимоги Ролєвої теореми істотні. На рис. 12.6 зображені графіки чотирьох функцій, означених на $[-1;1]$, для кожної з яких не виконана лише одна з трьох умов Ролєвої теореми або умова п. 1 цього зауваження і не існує такої точки $\xi\in(-1;1): f'(\xi)=0$.

а) функція $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0;1],\\ 1, & x=0\end{cases}$ — розривна;

б) функція $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ показує, що умову існування нескінченної похідної певного знаку (див. п. 1 цього зауваження) не можна замінити на умову існування просто нескінченної похідної;

в) функція $f(x)=\left|x\right|$ — недиференційовна в точці $x=0$;

г) для функції $f(x)=x, x\in[0;1]$, $f(0)\ne f(1)$.

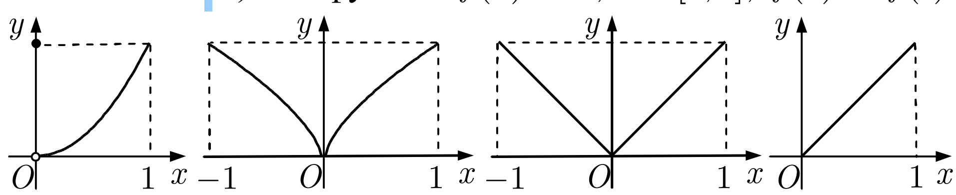

Рис. 12.6

Вправа 12.1. Довести, що для многочлена

$$P(x) = (x^2+1)(x+3)(x+2)(x-1)$$

в інтервалі $(-3;1)$ знайдеться корінь рівняння $P''(x)=0$.

Розв'язання вправи 12.1 див. у *п. 12.4.3.*

12.2.2. Теорема Коші

Теорема 12.3 (***Коші***). Якщо функції f і g:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,

3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b.$$

Доведення теореми 12.3 див. у *п. 12.4.4.*

12.2.3. Лаґранжова теорема

Теорема 12.4 (***Лаґранжа***). Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$

Доведення Лаґранжової теореми випливає з теореми Коші для $g(x)=x$.

Геометричний зміст Лаґранжової теореми полягає в тому, що на дузі AB (рис. 12.6) графіка функції $y=f(x)$, для якої виконано умови теореми, з кінцями в точках $A=(a;f(a))$ та $B=(b;f(b))$ знайдеться точка $C=(\xi;f(\xi))$, дотична в якій паралельна хорді AB.

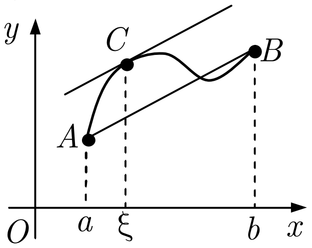

Рис. 12.6

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

ще звуть *Лаґранжовою формулою*. Якщо в Лаґранжовій формулі покласти $f(a) = f(b)$, одержимо Ролєву теорему, тобто Ролєва теорема є окремий випадок Лаґранжової.

Покладімо в Лаґранжовій формулі $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$. Тоді вона набуде вигляду

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \xi \in \left(x_0; x_0 + \Delta x \right).$$

Оскільки формула дає точний зв'язок приросту функції і приросту аргументу, її ще звуть *формулою скінченних приростів* (вказати точку ξ часто не можливо).

Вправа 12.2. Довести нерівність $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|$.

Розв'язання вправи 12.2. див. у *п. 12.4.5.*

12.3. Розкриття невизначеностей (правила Бернуллі — Лопіталя)

Теорема 12.5 Якщо функції f та g означені в околі точки x_0, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, існують скінченні похідні $g'(x_0) \ne 0$ та $f'(x_0)$, то існує

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \blacktriangleleft$$

Теорема 12.6 (***1-е правило Бернуллі — Лопіталя***). Якщо:

1) функції f та g диференційовні в $(a; b)$;

2) $\forall x \in (a; b) : g'(x) \ne 0$;

3) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$;

4) $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

то $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Доведення теореми 12.6 див. у *п. 12.4.6.*

Теорема 12.7 (***2-е правило Бернуллі — Лопіталя***). Якщо:

1) функції f та g диференційовні в $(a; b)$;

2) $\forall x \in (a; b) : g'(x) \ne 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

то $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Зауваження 12.4.

1. У теоремах 12.6 та 12.7 був розглянутий випадок, коли аргумент x прямує до числа a справа. До розглянутого зводяться випадки, коли аргумент x прямує до числа a зліва або довільним чином, а також випадки, коли $a \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$. У всіх цих випадках за відповідних припущень правдива формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Розгляньмо, приміром, прямування аргументу до $+\infty$ для функцій f та g, заданих на $[c;+\infty), c \in \mathbb{R}$. Цей випадок зводиться до теореми 12.7 заміною змінної $x = \dfrac{1}{t}$. Справді,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to+0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to+0} \frac{\left[f(1/t)\right]'}{\left[g(1/t)\right]'} =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Невизначеності $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ можна звести до невизначеностей $\dfrac{0}{0}$ та $\dfrac{\infty}{\infty}$ за допомогою перетворень:

$$fg = \left[0\cdot\infty\right] = \frac{f}{g^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{g}{f^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right];$$

$$f - g = [\infty - \infty] = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}} = \left[\frac{0}{0}\right];$$

$$f^g = \left[1^{\infty}\right] = e^{g\ln f} = e^{\frac{\ln f}{g^{-1}}} (f > 0).$$

3. Може трапитись, що границя відношення похідних не існує, тоді як границя відношення функцій існує.

Приміром, функції $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ та $g(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Відношення похідних $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ у точці $x=0$ границі не має. Отже, з існування $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не випливає існування $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Правило Бернуллі — Лопіталя інколи доводиться застосовувати кілька разів.

Приклади.

Знайдімо:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\ln x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}$.

❍ 1) $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=L.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-x-1\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}=L.$$

2) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\ln x}=[0^0]=\left|\begin{matrix}\ln x\sim(x-1),\\ x\to 1-0\end{matrix}\right|=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1-0}\ln(1-x)\cdot(x-1)}=\exp\left(\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{(x-1)^{-1}}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=L;$$

$$\exp\left(\lim_{x\to 1-0}\frac{-(1-x)^{-1}}{-(1-x)^{-2}}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)}=e^0=1=L.$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=L_1;$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty},n>1\right]=L_2;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(nx^{n-1})'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty},n>2\right]=L_3;...$$

$$L_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0\Rightarrow L_1=0.$$

Можна також показати, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\alpha>0.$

Тобто, степенева функція $x^\alpha,\alpha>0$ зростає не порівняно швидше логарифмічної і не порівняно повільніше показникової функції.

$$\ln x\ll x^\alpha\ll e^x,x\to+\infty\ \forall\alpha>0.$$ ●

12.4. Додаткові відомості

12.4.1. Доведення теореми 12.1

Нехай функція f означена в околі $U(x_0)$ точки x_0 і досягає в цій максимуму тобто для будь-якої точки $x\in U(x_0)$ виконано нерівність $f(x)\le f(x_0)$. Тоді, якщо $x<x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,$$

а якщо $x>x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$$

За умовою теореми існує скінченна границя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

отже, у нерівностях можна перейти до границі, коли $x\to x_0$.

Отже, дістанемо $f'(x_0)\ge 0$ та $f'(x_0)\le 0$. Тобто

$$f'(x_0)=0.$$

12.4.2. Доведення теореми 12.2

Якщо для будь-якої точки $x\in(a;b)$ виконано рівність

$$f(x)=f(a)=f(b),$$

то функція f стала в цьому інтервалі і тому для будь-якої точки $\xi\in(a;b)$ виконано умову $f'(\xi)=0$.

Нехай існує точка $x_0 \in (a;b)$, для якої $f(x_0) \neq f(a)$, приміром, $f(x_0) > f(a)$. На підставі Ваєрштрасової теореми (див. Теорема 8.2 *п. 8.2.1*) для функції f існує така точка $\xi \in [a;b]$, у якій функція f набуває найбільшого значення. Тоді

$$f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b).$$

Тому $\xi \neq a$ та $\xi \neq b$, тобто $\xi \in (a;b)$ і функція f набуває в точці ξ найбільшого значення. Отже, на підставі теореми Ферма (див. Теорема 12.1 *розд. 12.1*) $f'(\xi) = 0$.

12.4.3. Розв'язання вправи 12.1

Оскільки $P(-3) = P(-2) = P(1) = 0$, і $P(x)$ — функція диференційовна на $\mathbb{R}$, то для функції $P(x)$ виконано всі умови Ролєвої теореми на $[-3;-2]$ і $[-2;1]$:

$$\exists \xi_1 \in (-3;-2) : P'(\xi_1) = 0;$$

$$\exists \xi_2 \in (-2;1) : P'(\xi_2) = 0.$$

Для функції $P'(x)$ на $[\xi_1;\xi_2] \subset (-3;1)$ виконано всі умови Ролєвої теореми:

$$\exists \zeta \in (\xi_1;\xi_2) \Rightarrow \zeta \in (-3;1) : P''(\zeta) = 0.$$

12.4.4. Доведення теореми 12.3

Для функції g виконано нерівність $g(a) \neq g(b)$, оскільки, якби $g(a) = g(b)$, то за Ролєвою теоремою (див. *Теорема 12.1*) знайшлася б точка $x_0 \in (a;b) : g'(x_0) = 0$, а це суперечить умові теореми.

Розгляньмо функцію

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x),$$

де число λ підберімо з умови

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Rightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Тоді функція $\varphi(x)$ справджуватиме на $[a;b]$ умови Ролєвої теореми. Тобто існує $\xi \in (a;b)$, для якого $\varphi'(\xi) = 0$.

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

12.4.5. Розв'язання вправи 12.2

1. Для $a = b$ нерівність виконано.

2. Нехай $a \neq b$. Тоді для функції $y = \operatorname{arctg} x$ на $[a;b]$ або на $[b;a]$ виконано умови Лаґранжової теореми:

$$\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \le 1, \xi \in \big(a;b\big).$$

$$\left|\frac{\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b}{a-b}\right| \le 1 \Rightarrow$$

$$\big|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b\big| \le \big|a-b\big|.$$

12.4.6. Доведення теореми 12.6

Доозначимо функції f та g в точці $x = a$, поклавши $f(a) = g(a) = 0$.

Тоді, $\forall x \in (a;b)$ продовжені функції на відрізку $[a;x]$ справджуватимуть умови теореми Коші, і тому $\exists \xi = \xi(x), a < \xi < x$, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to a} \xi(x) = a$ і $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

і, отже, існує

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$