Модуль 13. Тейлорова формула і її застосування

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 13.1—13.3) і розширеному (розділи 13.1—13.4).

У модулі:

— виведено Тейлорову формулу — потужного математичного інструменту дослідження функцій, обчислення границь і наближеного обчислення значень функцій;

— одержано формули Тейлора — Маклорена для основних елементарних функцій;

— проілюстровано викладену теорію розв'язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв'язання (з відповідями) і 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

13.1. Тейлорова формула

13.1.1. Тейлорова формула із залишковим членом у формі Пеано

Найпростішими функціями в розумінні обчислень їхніх значень є многочлени. Виникає питання про можливість заміни функції $f(x)$ в околі точки x_0 многочленом деякого степеня.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то її приріст можна записати як

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

або

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Тобто існує многочлен 1-го степеня

$$P_1(x) = f(x_0) + b_1(x - x_0),$$

такий, що

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0),$$

коли $x \to x_0$. Причому $P_1(x)$ справджує умови:

$$P_1(x_0) = f(x_0), P_1'(x_0) = b_1 = f'(x_0).$$

Поставмо загальнішу задачу. Нехай функція, означена в деякому околі точки x_0, має в цій точці n похідних $f'(x_0), f''(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$. Треба з'ясувати, чи існує многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n, такий, що

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n); \tag{13.1}$$

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P_n'(x_0), ..., f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.2}$$

Шукатимемо многочлен, який справджує сформульовані умови у вигляді

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n. \tag{13.3}$$

Визначмо тепер коефіцієнти многочлена $P_n(x)$ так, щоб вони справджували умови (10.2). Знайдімо попередньо похідні від $P_n(x)$:

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + ... + nb_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + ... + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1b_3 + ... + n(n-1)(n-2)b_n(x - x_0)^{n-3}, \tag{13.4}$$

……………………………………………………………………………

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1b_n.$$

Підставляючи в ліві та праві частини рівностей (13.3) та (13.4) замість x значення x_0, знайдемо значення всіх коефіцієнтів $b_i, i = \overline{0, n}$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = P_n(x_0) = b_0, \\ f'(x_0) = P_n'(x_0) = b_1, \\ f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2\cdot 1 b_2, \\ f'''(x_0) = P_n'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1 b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n!\, b_n, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = f(x_0), \\ b_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1!}, \\ b_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}, \\ b_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \end{array}\right.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у рівність (13.3), дістаємо многочлен вигляду

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

який звуть *Тейлоровим многочленом* за степенями $(x - x_0)$ функції f.

Доведімо, що Тейлорів многочлен справджує умову (13.1). Позначмо різницю між функцією та її Тейлоровим многочленом

$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x).$$

На рис. 13.1 подано графіки функції $y = f(x)$ та її Тейлорового многочленом в околі точки x_0. Для тих значень x з околу точки x_0, для яких похибка $r_n(x)$ досить мала, многочлен $P_n(x)$ наближено зображує функцію f.

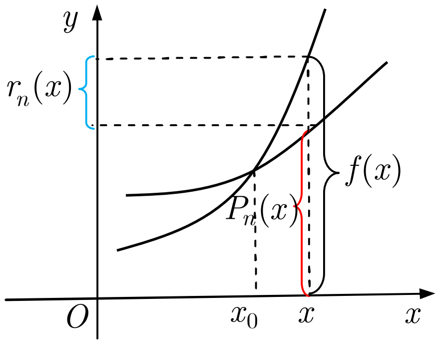

Рис. 13.1

Згідно з означенням многочлена $P_n(x)$, з умов (13.2) випливає, що

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Доведімо, що

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Застосуймо n разів правило Бернуллі — Лопіталя для розкриття невизначености вигляду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!}=0,$$

тобто $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, коли $x\to x_0$. Доведена важлива

Теорема 13.1. Якщо функція $y=f(x)$ означена й n разів диференційовна в околі точки x_0, то правдива формула

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+$$
$$+o((x-x_0)^n),x\to x_0,$$

де $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$ — залишковий член у формі Пеано.

Формулу

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

де $r_n(x)=o((x-x_0)^n),x\to x_0$, звуть *Тейлоровою формулою* n-го порядку в околі точки x_0 *із залишковим членом у формі Пеано* для функції f.

Якщо в Тейлоровій формулі покласти $x_0=0$, дістанемо її окремий випадок — *формулу Тейлора — Маклорена*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

13.1.2. Тейлорова формула для многочлена

Нехай задано многочлен

$$P_n(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n.$$

Для будь-якого x_0 цей многочлен можна зобразити як суму степенів різниці $x-x_0$, узятих з деякими коефіцієнтами. Справді, покладімо

$$x=x_0+t.$$

Тоді

$$P_n(x)=P_n(x_0+t)=b_0+b_1(x_0+t)+\ldots+b_n(x_0+t)^n.$$

Розкриваючи у правій частині дужки і групуючи подібні члени, одержимо

$$P_n(x)=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots+A_nt^n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n.$$

Вираз справа — буде Тейлоровим многочленом за степенями $(x - x_0)$ для многочлена $P_n(x)$ степеня n. Отже,

$$A_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, k = \overline{0, n}; \;\; r_n(x) = 0;$$

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

13.1.3. Тейлорова формула із залишковим членом у Лаґранжовій формі

Існують різні форми запису залишкового члена $R_n(x)$ Тейлорової формули. У наближених обчисленнях зручною є Лаґранжова форма залишкового члену.

Теорема 13.2. Якщо функція $y = f(x)$ означена й $(n + 1)$ разів диференційовна в околі точки x_0, то правдива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

де $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$ — *залишковий член у Лаґранжовій формі*.

Доведення теореми 13.2 див. у *п. 13.4.1.*

13.1.4. Тейлорова формула в диференціальній формі

Покладаючи $x - x_0 = \Delta x, x = x_0 + \Delta x$ у Тейлоровій формулі

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

дістаньмо

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + r_n(x).$$

Оскільки

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$
$$f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n f(x_0),$$

то Тейлорову формулу можна записати в *диференціальній формі*

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + r_n(x).$$

13.2. Розвинення за формулою Тейлора — Маклорена елементарних функцій

13.2.1. Розвинення функції $f(x) = e^x$

Функція $f(x) = e^x$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$. Знайдімо послідовні похідні від функції $f(x) = e^x$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x, \\ f'(x) = e^x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(0) = 1 \\ f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}. \end{array}\right.$$

Підставляючи одержані значення $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n)}(0), f^{(n+1)}(\theta x)$ у формулу Тейлора — Маклорена із залишковим членом у Лаґранжовій формі, дістаємо

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$
$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},$$

де $0 < \theta < 1$.

13.2.2. Розвинення функції $f(x) = \sin x$

Функція $f(x) = \sin x$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$. Знайдімо послідовні похідні від $f(x) = \sin x$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x, \\ f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \\ f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0) = 0, \\ f'(x) = 1, \\ f''(x) = 0, \\ f'''(x) = -1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \\ f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right). \end{array}\right. \Rightarrow$$

Отже,

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2k, \\ (-1)^k, & m = 2k+1, \end{cases} k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отже, у Тейлоровому многочлені для $\sin x$ рівні нулеві коефіцієнти при парних степенях x, так що многочлен степеня $(2n+1)$ та степеня $(2n)$ збігаються.

Підставляючи знайдені значення похідних у формулу Тейлора — Маклорена, дістаємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x),$$
$$r_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), 0 < \theta < 1.$$

Наближення функції $f(x) = \sin x$ Тейлоровими многочленами подано на рис. 13.2.

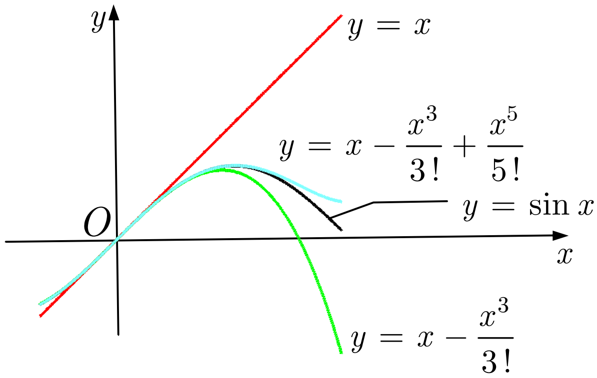

Рис. 13.2

13.2.3. Розвинення функції $f(x) = \cos x$

Оскільки $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$f^{(m)}(0) = \cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0, & m = 2k+1, \\ (-1)^k, & m = 2k, \end{cases} k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2k+2}(x),$$
$$r_{2k+2} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\left(\theta x + (2k+2)\frac{\pi}{2}\right), 0 < \theta < 1.$$

13.2.4. Розвинення функції $f(x) = \ln(1+x)$

Функція $f(x) = \ln(1+x)$ означена і нескінченно диференційовна в інтервалі $(-1; +\infty)$. Знайдімо послідовні похідні цієї функції

$$\left.\begin{aligned}
&f(x) = \ln(1+x),\\
&f'(x) = (1+x)^{-1},\\
&f''(x) = -(1+x)^{-2},\\
&f'''(x) = 2\cdot 1(1+x)^{-3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},\\
&f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n} n!(1+x)^{-(n+1)},
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
&f(0) = 0,\\
&f'(0) = 1,\\
&f''(0) = -1,\\
&f'''(0) = 2\cdot 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,\\
&f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^{n} n!(1+\theta x)^{-(n+1)}.
\end{aligned}\right.$$

Підставляючи обчислені значення у формулу Тейлора — Маклорена, дістаємо розвинення $\ln(1+x)$ за формулою Тейлора — Маклорена із залишковим членом у Лаґранжовій формі:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$
$$r_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, 0 < \theta < 1.$$

13.2.5. Розвинення функції $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

Функція $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R},$ означена і нескінченно диференційовна в інтервалі $(-1;1)$. Знайдімо послідовно похідні від функції $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

$$\left.\begin{aligned}
&f(x) = (1+x)^{\alpha},\\
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\\
&f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\\
&f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\\
&f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(0) = \alpha, \\ f''(0) = \alpha(\alpha - 1), \\ f'''(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1), \\ f^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені значення функції та її похідних у формулу Тейлора — Маклорена, дістаємо

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + r_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)}{(n + 1)!}(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1} x^{n+1}.$$

Якщо $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то всі члени формули Тейлора — Маклорена, починаючи з $(m + 1)$-го зникають, і формула Тейлора — Маклорена перетворюється на відому формулу Ньютонового бінома

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m(m - 1)}{2!} x^2 + \dots + x^m \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

13.3. Застосування Тейлорової формули

13.3.1. Застосування Тейлорової формули для вилучення головної частини функції

Якщо функція $f(x)$ означена в околі $U(x_0)$, то для вилучення її головної частини зручно використовувати Тейлорову формулу із залишковим членом у формі Пеано.

У модулі 7 вже було встановлено асимптотичні формули для елементарних функцій

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + o(x), \\ \sin x &= x + o(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ \ln(1 + x) &= x + o(x), \\ (1 + x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \end{aligned}\right\} x \to 0.$$

Ці формули дають зображення елементарних функцій для малих значень $|x|$ і ними можна користуватися для обчислення границь. Обчислюючи границі, де визначальну роль відіграють члени вищого порядку щодо x, коли $x \to 0$, доведеться користуватись точнішими асимптотичними оцінками. Дістаємо їх з формули Тейлора — Маклорена із залишковим членом у формі Пеано:

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n). \end{aligned}\right\} x \to 0$$

Приклад.

Знайдімо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^3} = \\ = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Цю границю можна було б знайти і за правилом Бернуллі — Лопіталя.

13.3.2. Застосування Тейлорової формули для обчислення наближених значень функції

Якщо відомі значення функції та її похідних у точці x_0, то для обчислення наближених значень функції в околі $U(x_0)$ зручно використовувати Тейлорову формулу із залишковим членом у Лаґранжовій формі.

Значення $f(x)$ в околі $U(x_0)$ обчислюють за формулою

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

похибка наближення

$$\left| r_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|, x_0 < \xi < x.$$

Приклад.

Обчислімо $e^{0,1}$ з точністю до $0,001$.

❍ Запишімо формулу Тейлора — Маклорена для e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x\,!}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + r_n(x),$$
$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)\,!}\,x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

Похибка наближення не повинна перевищувати $0,001$, отже,

$$r_n(x) = \frac{e^{0,1\theta}(0,1)^{n+1}}{(n+1)\,!} < 0,001.$$

Оскільки $e^{0,1\theta} < 2$, то

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)\,!} < 0,001.$$

Покладаючи $n = 1, 2, 3, \ldots$, знайдемо, що нерівність виконано, починаючи з $n = 3$.

Отже, з точністю до $0,001$

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1\,!} + \frac{0,01}{2\,!} + \frac{0,001}{3\,!} = 1,105. \bullet$$

При $n = 1$ функцію f наближають многочленом 1-го степеня

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

з похибкою

$$r_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2\,!}(x - x_0)^2$$

Оскільки за означенням $x - x_0 = \Delta x, f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, то

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0),$$

з похибкою, що не перевищує

$$\left|r_2(x)\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2\,!}(x - x_0)^2\right|, x_0 < \xi < x.$$

Вправа 13.1. Знайдіть за допомогою диференціала функції площу S круга радіусом $r = 1,01$. Оцініть похибку обчислення.

Розв'язання вправи 13.1 див. у. 13.4.2.

13.4. Додаткові відомості

13.4.1. Доведення теореми 13.2

Вимагатимемо, щоб функція f мала похідну $(n+1)$-го порядку в околі точки x_0. Розгляньмо функцію $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Очевидно, що

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0, g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)\,! \neq 0.$$

Застосуймо до функцій $r_n(x)$ та $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$ теорему Коші. Тоді на підставі умови

$$r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$$

дістаємо

$$\frac{r_n(x)}{g(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{r_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{r_n'(c_1) - r_n'(x_0)}{g_n'(c_1) - g_n'(x_0)} = \frac{r_n''(c_2)}{g_n''(c_2)} = \ldots =$$

$$= \frac{r_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{r_n^{(n)}(c_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

де $c_1 \in (x_0; x); c_2 \in (x_0; c_1), \ldots, c_n \in (x_0; c_{n-1}); \xi \in (x_0; c_n)$.

Отже, показано, що

$$\frac{r_n(x)}{g(x)} = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \xi \in (x_0; x).$$

З урахуванням того, що

$$g(x) = (x - x_0)^{n+1}, g^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!, r_n^{(n)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi),$$

дістаємо залишковий член у Лаґранжовій формі

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0; x).$$

Оскільки $\xi \in (x_0; x)$, то ξ можна зобразити у вигляді

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1,$$

тобто залишковий член у Лаґранжовій формі можна записати у вигляді

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

13.4.2. Розв'язання вправи 13.1

Площа круга $S = \pi r^2$. Покладаючи $r_0 = 1, \Delta r = 0,01$ і заміняючи приріст функції $S = S(r)$ її диференціалом, маємо

$$S(r) \approx S(r_0) + dS(r_0) = S(r_0) + S'(r_0)\Delta r = \pi r_0^2 + 2\pi r_0 \Delta r;$$

$$S(1,01) \approx \pi + 2\pi \cdot 0,01 = 1,02\pi \approx 3,204.$$

При цьому похибка не перевищує

$$r_2(r) = \frac{S''(\xi)}{2!}(r - r_0)^2, r_0 < \xi < r.$$

Оскільки $S''(r) = 2\pi$ і не залежить від r, то

$$r_2(r) = \frac{2\pi}{2!} 0,01^2 = 0,0001\pi < 0,0004.$$