Модуль 14. Дослідження функцій за допомогою похідних

Структура модуля

Вступ

Короткий зміст

Теоретична частина

Розділ 14.1. Дослідження функцій за допомогою першої похідної

14.1.1. Монотонність функцій

14.1.2. Умови існування локального екстремуму функції

14.1.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Розділ 14.2. Дослідження функцій за допомогою другої похідної

14.2.1. Опуклість функції

14.2.2. Умови існування точки перегину функції

Розділ 14.3. Додаткові відомості

14.3.1. Доведення теореми 14.1

14.3.2. Доведення теореми 14.4

14.3.3. Достатня умова існування екстремуму

14.3.4. Доведення теореми 14.5

14.3.5. Достатня умова існування точки перегину функції

Вступ

Короткий зміст

Теоретичний матеріал модуля викладено на двох рівнях — базовому (розділи 14.1—14.2) і розширеному (розділи 14.1—14.3).

У модулі:

— подано умови монотонності й опуклості функцій;

— сформульовано необхідну і достатню умови існування локального екстремуму та точок перегину функцій;

— розглянуто спосіб знаходження найбільшого та найменшого значення неперервної функції на відрізку;

— проілюстровано викладену теорію розв’язаними вправами та навчальними задачами;

— запропоновано низку задач для самостійного розв’язання (з відповідями) та 30 варіантів індивідуального завдання (з методичними вказівками).

Теоретична частина

14.1. Дослідження функцій за допомогою першої похідної

14.1.1. Монотонність функцій

Теорема 14.1

(***критерій монотонності***). Нехай функція f диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді:

1) функція f стала в $(a;b)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a;b) : f'(x) = 0$;

2) функція f не спадає в $(a;b)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a;b) : f'(x) \geq 0$;

3) функція f не зростає в $(a;b)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (a;b) : f'(x) \leq 0$.

Доведення теореми 14.1 див. у *п. 14.3.1.*

Наслідок.

Якщо функції f та g диференційовні в інтервалі $(a;b)$, і $\forall x \in (a;b) : f'(x) = g'(x)$, то ці функції в $(a;b)$ можуть відрізнятись лише на сталу.

► Розгляньмо функцію $\varphi = f - g$. Оскільки

$$\forall x \in (a;b) : \varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

то

$$\varphi(x) = C, \; f(x) = g(x) + C. ◄$$

Теорема 14.2

(***достатні умови строгої монотонності***). Якщо функція f диференційовна в інтервалі $(a;b)$ та $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ скрізь, крім, можливо, скінченної кількості точок, у яких $f'(x) = 0$ в $(a;b)$, то функція f зростає (спадає) в інтервалі $(a;b)$.

Зауваження 14.1.

1. Якщо функція f зростає (спадає) в $(a;b)$, то це ще не означає, що $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в усіх точках проміжку. Приміром, функція $y = x^3$ (рис. 14.1) зростає в $(-\infty;+\infty)$, однак $y'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$.

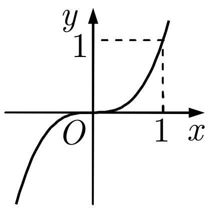


Рис. 14.1

2. Інтервали монотонності функції відокремлюють один від одного або точки, де похідна дорівнює нулеві, або точки, де похідна дорівнює нескінченності чи не існує.

Означення 14.1. Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 звуть *критичною точкою 1-го порядку*, якщо виконано одну з умов:

1) $f'(x_0) = 0$;

2) $f'(x_0) = \infty$;

3) $\nexists f'(x_0)$.

Геометрично ці умови означають, що у критичній точці 1-го порядку дотична або паралельна осі Ox (умова 1) (такі точки звуть *стаціонарними*), або паралельна осі Oy (умова 2) (такі точки звуть *точками вертання*) або дотичної не існує (умова 3) (такі точки звуть *кутовими*) (рис. 14.2).

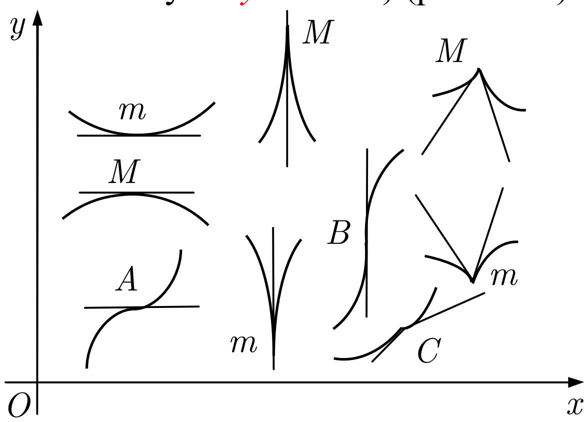


Рис. 14.2

Для того щоб знайти інтервали монотонності функції f, треба:

1) знайти область означення функції;

2) знайти критичні точки 1-го порядку функції, що належать області означення;

3) розбити критичними точками область означення на інтервали та в кожному інтервалі визначити знак похідної;

4) зробити висновок про поводження функції в кожному інтервалі.

Приклад. Знайдімо інтервали монотонності функцій
$$f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}.$$

❍ $D(f) : x \in [-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$.

$$f'(x) = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = \frac{2x}{|x|} \frac{4 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}}.$$
$$f'(x) = 0 : x_1 = -2, x_2 = 2;$$
$$f'(x) = \infty : x_{3,4} = \pm\sqrt{8};$$
$$\nexists f'(x) : x = 0.$$

Критичними точками 1-го порядку є $-\sqrt{8}, -2, 0, 2, \sqrt{8}$.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
f' & & + & & - & & + & & - & \\
f & -\sqrt{8} & \nearrow & -2 & \searrow & 0 & \nearrow & 2 & \searrow & \sqrt{8} \quad x
\end{array}
$$

Отже,

$$f \nearrow: (-\sqrt{8}; -2) \cup (0; 2); f \searrow: (-2; 0) \cup (2; \sqrt{8}). \bullet$$

14.1.2. Умови існування локального екстремуму функції

Особливу роль у дослідженні поводження функції на множині відіграють точки, які відокремлюють інтервали зростання і спадання функції.
Це точки локального екстремуму.

Теорема 14.3 (***необхідна умова існування екстремуму функції***). Якщо в точці x_0 функція f досягає екстремуму, то ця точка є критичною точкою 1-го порядку.

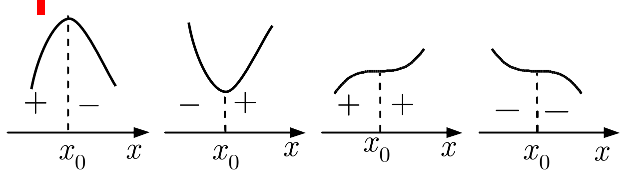
Зауваження 14.2. Обернене твердження не правильне: не всяка критична точка є точкою екстремуму. На рис. 14.2 в точках A, B, C виконано відповідно умови 1), 2) та 3) з означення 14.1 критичної точки 1-го порядку, однак екстремуму в цих точках немає.

Теорема 14.4 (***достатня умова локального екстремуму***). Нехай x_0 — критична точка і функція f неперервна в деякому околі точки x_0. Якщо в цьому околі:

1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, тобто, переходячи через точку x_0 похідна змінює знак із плюса на мінус, то в точці x_0 функція досягає максимуму (рис. 14.3 а);

2) $f'(x) < 0$, коли $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, коли $x > x_0$, тобто, переходячи через точку x_0 похідна змінює знак із мінуса на плюс, то функція досягає в точці x_0 мінімуму (рис. 14.3. б);

3) похідна не змінює знак переходячи через x_0, то в точці x_0 екстремуму немає (рис. 14.3. в, г).



а б в г

Рис. 14.3

Доведення теореми 14.4 див. у п. 14.3.2.

Інші достатні умови існування локального екстремуму функції див. у п. 14.3.3.

Зауваження 14.3. **1.** Умова неперервності функції f у самій точці істотна. Приміром, для функції

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(рис. 14.4) похідна $f'(x)$ існує в усіх точках, окрім точки $x = 0$. Переходячи через цю точку похідна змінює знак, але в точці $x = 0$ функція екстремуму не має: не існує околу точки $x = 0$, у якій $f(0) = 1$ було б найбільшим або найменшим значенням функції $f(x)$. Тут порушена умова неперервності функції $f(x)$ у точці $x = 0$.

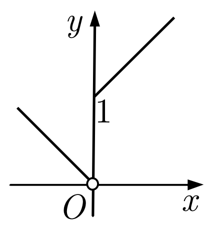


Рис. 14.4

2. Для функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

(рис. 14.5) похідна $f'(x)$ існує в усіх точках, окрім точки $x = 0$. Переходячи через цю точку, похідна $f'(x) = 2x$ міняє знак з мінуса на плюс, але в точці $x = 0$ функція має не мінімум, а максимум. Знову порушена умова неперервності функції f у точці $x = 0$.

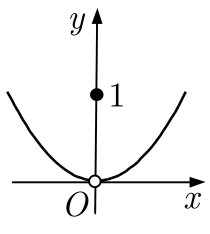


Рис. 14.5

Для того щоб знайти точки локального екстремуму функції f, треба:

1) знайти область означення функції;

2) знайти критичні точки 1-го порядку функції f, якщо вони є (якщо їх немає, то функція не має й екстремумів);

3) дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають обсяг означення;

4) за зміною знаку $f'(x)$ визначити точки максимумів та мінімумів.

Приклад. Знайдімо екстремуми функції $y = x\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}$.

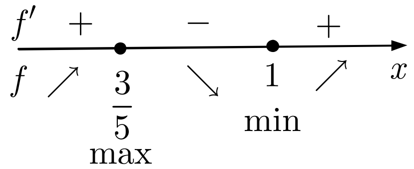
❍ $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

$$y' = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$y' = 0 : 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}.$$

$$y' = \infty : \sqrt[3]{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Критичні точки $\frac{3}{5}, 1$.



$$y_{\min}(1) = 0, y_{\max}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{9}{25}}.$$ ●

14.1.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$. Теорема Ваєрштраса твердить, що така функція досягає на $[a;b]$ свого найменшого та найбільшого значення. Цих значень вона може набувати або у критичних точках інтервалу $(a;b)$ або на межі при $x = a$ чи $x = b$ (рис. 14.6)

Для того щоб знайти найбільші та найменші значення функції на відрізку $[a,b]$ треба:

1) знайти критичні точки 1-го порядку функції в інтервалі $(a;b)$;

2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку $[a;b]$;

3) серед обчислених значень функції вибрати найбільше та найменше.

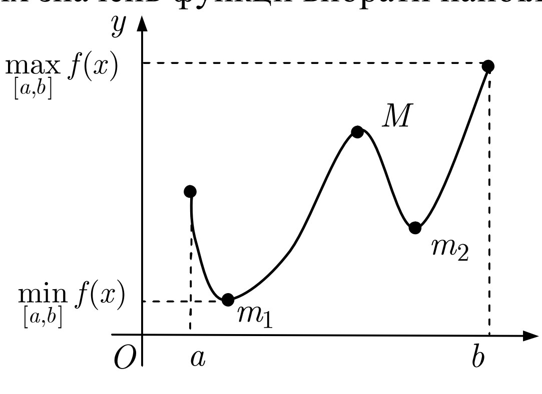


Рис. 14.6

Приклад. Знайдімо найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$$

на відрізку $[-1;2]$

❍ Функція $f \in C_{[-1;2]}$. Знайдімо критичні точки 1-го порядку функції в інтервалі $(-1;2)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4).$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$
$$x_1, x_3 \notin (-1;2); x_2 \in (1;2).$$
$$f(-1) = -4;\ f(0) = 3;\ f(2) = -13.$$

Отже,

$$\max_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 3;\ \min_{[-1;2]} f(x) = f(2) = -13. ●$$

Зауваження 14.4. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ має лише одну критичну точку і вона є точкою максимуму (мінімуму), то в цій точці функція набуває свого найбільшого (найменшого) значення.

14.2. Дослідження функцій за допомогою другої похідної

14.2.1. Опуклість функції

Розгляньмо функцію $f(x), x \in (a;b)$. ґнехай x_1 та x_2 — дві різні точки інтервалу $(a;b)$. Через точки $A(x_1;f(x_1))$ та $B(x_2;f(x_2))$ графіка функції f проведімо хорду AB.

Означення 14.2. Функцію f звуть *опуклою донизу* ($\Leftrightarrow$*угнутою*) в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB лежить не нижче (рис. 14.7) графіка цієї функції.
Функцію f звуть *опуклою догори* ($\Leftrightarrow$*опуклою*) в інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a;b)$, $a \le x_1 < x_2 \le b$, хорда AB лежить не вище (рис. 14.8) графіка цієї функції.

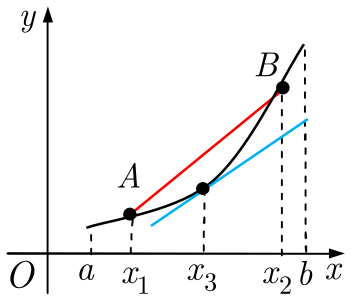


Рис. 14.7

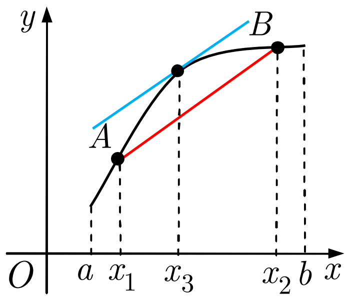


Рис. 14.8

Твердження 14.1. Неперервно диференційовна функція f опукла донизу (догори) в інтервалі $(a;b)$ тоді й лише тоді, коли всі точки $(x;f(x)), x \in (a;b)$, графіка функції лежать не нижче (не вище) дотичної, проведеної до нього в точці $(x_3;f(x_3)), x_3 \in (a;b)$ (див. рис. 14.7 та 14.8).

Теорема 14.5 (***достатня умова опуклості функції***). Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді:

1) якщо $f''(x) > 0 \, \forall x \in (a;b)$, то графік цієї функції в інтервалі $(a;b)$ опуклий донизу;

2) якщо $f''(x) < 0 \, \forall x \in (a;b)$, то графік цієї функції в інтервалі $(a;b)$ опуклий догори.

Доведення теореми 14.5 див. у *п. 14.3.4.*

14.2.2. Умови існування точок перегину

Означення 14.2. Точку x_0 звуть *точкою перегину* функції f, якщо існує такий δ-окіл $U_\delta(x_0)$ точки x_0, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ графік функції розташований з одного боку дотичної, а для всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — із другого боку, тобто переходячи через точку x_0 функція f міняє напрям опуклості (на рис. 14.9 точка $x = b$ — точка перегину функції f).

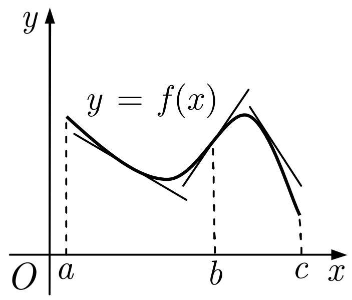


Рис. 14.9

Інтервали опуклості графіка функції можуть відокремлюватись один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулеві, або точками, де друга похідна дорівнює нескінченності, або точками, де друга похідна не існує.

Означення 14.4. Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 звуть *критичною точкою 2-го порядку*, якщо виконано одну з умов:

1) $f''(x_0) = 0$;
2) $f''(x_0) = \infty$;
3) $\nexists f''(x_0)$.

Теорема 14.6

(***необхідна умова існування точки перегину***). Якщо $M_0(x_0; f(x_0))$ — точка перегину графіка функції $y = f(x)$, то x_0 — критична точка 2-го порядку.

Зауваження 14.4.

Ця умова не є достатньою. Приміром, для функції $y = x^4, y''(0) = 12x^2 \mid_{x=0} = 0$, але $x = 0$ не є точкою перегину.

Теорема 14.7

(***достатня умова існування точки перегину***). Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ міняє знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f.

Іншу достатню умову існування точок перегину функції див. у *п. 14.3.5.*

Приклад.

Знайдімо інтервали опуклості та точки перегину функції $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

❍ Ця функція означена, неперервна і диференційовна на $\mathbb{R}$, причому

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Дослідімо знак $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

f''	$+$		$-$		$+$
f	$\cup$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cap$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cup$ x

Отже, графік функції $y = f(x)$ опуклий донизу на $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, й опуклий догори на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Точки перегину $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ●

14.3. Додаткові відомості

14.3.1. Доведення теореми 14.1

$\boxed{\Rightarrow}$ Візьмемо точки x та $x+h$ в $(a;b)$. Функція f диференційовна в точці x, отже:

1) якщо функція f стала в $(a;b)$, то
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0\Rightarrow f'(x)=0;$$

2) якщо функція f не спадає в $(a;b)$, то
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0;$$

3) функція f не зростає в $(a;b)$, то
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Виберімо довільно $x_1,x_2\in(a;b)$, $x_1<x_2$. Функція f буде неперервною на $[x_1;x_2]\subset(a;b)$ і диференційовною в $(x_1;x_2)\subset(a;b)$. Тому за теоремою 12.4 (Лаґранжа) (див. *п. 12.2.3*) існує точка $c: x_1<c<x_2$, що
$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

Оскільки припущення про значення похідної правдиве для всіх точок $(a;b)$, а, отже, і для c, то

1) $f'(c)=0\Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$;

2) $f'(c)\geq 0\Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$;

3) $f'(c)\leq 0\Rightarrow f(x_2)\leq f(x_1)$.

14.3.2. Доведення теореми 14.4

Нехай x_0 — точка можливого екстремуму, причому $f'(x)>0$, коли $x\in U_\delta(x_0-0)$, та $f'(x)<0$, коли $x\in U_\delta(x_0+0)$.

Тоді
$$\left.\begin{aligned}f'(x)>0\,\forall x\in U_\delta(x_0-0)\Rightarrow f(x_0)>f(x),\\ f'(x)<0\,\forall x\in U_\delta(x_0+0)\Rightarrow f(x)<f(x_0),\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists U_\delta(x_0): f(x_0)>f(x),$$

Тобто точка x_0 є точкою локального максимуму.

Так само доводиться й існування точки локального мінімуму.

Якщо $f'(x)$ зберігає знак в околі точки x_0, то в цьому околі функція монотонна, тобто точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

14.3.3. Достатня умова існування екстремуму

Теорема 14.8 (***достатня умова локального екстремуму***). Нехай функція f n разів неперервно диференційовна в точці x_0 та $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді:

1) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму;

2) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму;

3) якщо n — непарне, то x_0 не є точкою екстремуму.

►Скористаємось Тейлоровою формулою із залишковим членом у формі Пеано, врахувавши умову теореми,

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n, x \to x_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$
$$\alpha(x) \to 0, x \to x_0.$$

Перепишімо це формулу так:

$$f(x) - f(x_0) = (f^{(n)}(x_0) + \alpha(x))(x - x_0)^n.$$

Оскільки $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ та $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to x_0$, то сума $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ має знак $f^{(n)}(x_0)$, коли x досить близько до x_0.

Якщо n непарне, то після переходу через x_0 дужка $(x - x_0)^n$ міняє знак, і тоді міняється знак усієї правої, а отже, й лівої частини рівності. Отже, при n непарному, екстремуму в точці x_0 функція не досягає.

Якщо n парне, то $(x - x_0)^n > 0$, $x \neq x_0$ і, отже, в малому околі точки x_0 знак різниці $f(x) - f(x_0)$ збігається зі знаком $f^{(n)}(x_0)$. Тобто, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму, а якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка мінімуму.◄

Важливий окремий випадок цієї теореми при $n = 2$.

Наслідок.

Якщо у критичній точці функція f двічі диференційовна (тобто $f'(x_0) = 0$), то:

1) при $f''(x_0) < 0$ функція f досягає в точці x_0 максимуму;

2) при $f''(x_0) > 0$ функція f досягає в точці x_0 мінімуму.

14.3.4. Доведення теореми 14.5

Нехай в інтервалі $(a;b)$ $f''(x) > 0$. Візьмімо точку $x_0 \in (a;b)$ й покажемо, що всі точки графіка функції $y = f(x)$ в інтервалі лежать вище дотичної до нього в точці x_0. Позначмо y — ординату точки кривої; Y — ординату точки дотичної.

Крива $y = f(x)$ має у точці $(x_0; f(x_0))$ дотичну.

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Скориставшись Тейлоровою формулою 1-го порядку, матимемо

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \xi \in \left(x_0; x\right).$$

Отже,

$$y - Y = f(x_0) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \right);$$

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2. \tag{14.1}$$

Якщо $f''(x_0) \neq 0$, то завдяки збереженню знаку неперервної функції в околі точки x_0 знак $f''(\xi)$ збігається зі знаком $f''(x_0)$. Отже, з рівності (14.1) випливає, що знак різниці $y - Y$ збігається зі знаком $f''(x_0)$.

Тому, якщо $f''(x) > 0$, то $y - Y > 0$ для всіх точок $x \neq x_0$, досить близьких до точки x_0, і в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ опуклість спрямована донизу.

Так само розглядають випадок $f''(x) < 0$.

14.3.5. Достатня умова існування точки перегину функції

Теорема 14.9

(***достатня умова існування точки перегину***). Нехай функція f n разів неперервно диференційовна в точці x_0 та $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді якщо n — непарне, то $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину.

►Скористаємось Тейлоровою формулою із залишковим членом у формі Пеано

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

$$\alpha(x) \to 0, x \to x_0.$$

Перепишімо співвідношення так:

$$f(x) - f(x_0) = (f^{(n)}(x_0) + \alpha(x))(x - x_0)^n.$$

Оскільки $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ та $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to x_0$, то сума $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ має знак $f^{(n)}(x_0)$, коли x досить близько до x_0. Якщо n непарне, то після переходу через x_0 дужка $(x - x_0)^n$ змінює знак, і тоді міняється знак усієї правої, а отже, й лівої частини рівності. Отже, при n непарному, переходячи через x_0 графік функція міняє напрям опуклості.◄