# Лекція 2. Елементарні функції комплексної змінної

**Короткий зміст**

## Короткий зміст

У цій лекції:

— впроваджено елементарні функції комплексної змінної (показникова, логарифмічна, степенева, тригонометричні та обернені тригонометричні, гіперболічні та обернені гіперболічні) та вивчено їх основні властивості.

## 2.1. Елементарні функції комплексної змінної

### 2.1.1. Показникова функція

*Показникову функцію* $e^z$ для будь-якого комплексного числа $z = x + iy$ означують співвідношенням

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

При $x = 0$ одержимо відому формулу Ейлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

При $y = 0$ означення показникової функції комплексної змінної узгоджується з означенням показникової функції дійсної змінної.

Функція $e^z$ є однозначною, неперервною функцією на всій розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$.

***Властивості.***

1. Для функції $e^z$ правдива теорема додавання
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$
2. Для довільного комплексного $z = x + iy$ правдиві рівності
$$|e^z| = e^x; \ \arg e^z = y.$$
3. Функція $e^z$ — періодична з уявним основним періодом $2\pi i$.

**Доведення властивостей показникової функції**

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$
$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}.$

2. Властивість випливає з означення показникової функції.

3. $e^{z+2\pi ki} = e^{x+(y+2\pi k)i} = e^x(\cos(y+2\pi k) + i\sin(y+2\pi k)) =$
$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z, \forall k \in \mathbb{Z}.$

### 2.1.2. Логарифмічна функція

*Логарифмічну функцію комплексної змінної* означують як обернену до показникової функції.

З рівняння

$$z = e^w$$

де

$$z = |z|e^{i\arg z} \neq 0$$

задано,

$$w = u + iv$$

— невідомо, одержимо

$$|z|e^{i\arg z} = e^{u+iv} = e^u e^{iv},$$

звідси

$$|z| = e^u \quad \Rightarrow \quad u = \ln|z|;$$

$$e^{i\arg z} = e^{iv} \quad \Rightarrow \quad v = \arg z + 2\pi k = \operatorname{Arg} z, k \in \mathbb{Z},$$

де $\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа.

Отже,

$$w \overset{\text{den}}{=} \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z},$$

тобто логарифмічна функція є многозначною функцією, яка визначена для всіх $z \neq 0$. Однозначну вітку цієї функції можна виділити, підставивши замість $k$ певне значення.

При $k = 0$ одержимо *головне значення логарифму*

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Тоді

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}.$$

***Приклад 2.1.*** Обчислити значення функції $\operatorname{Ln}(-3)$.

❍ Оскільки

$$|-3| = 3, \qquad \arg z = \pi,$$

тому

$$\operatorname{Ln}(-3) = \ln 3 + i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}. \bullet$$

Якщо $z$ – дійсне додатне число, тоді $\arg z = 0$ і $\ln z = \ln|z|$. Отже, головне значення логарифму дійсного додатного числа співпадає зі звичайним натуральним логарифмом цього числа.

Логарифмічна функція $w = \operatorname{Ln} z$ має відомі властивості логарифму дійсної змінної.

***Властивості.***

1. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.
2. $\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.
3. $\operatorname{Ln}(z^n) = n\operatorname{Ln} z$.
4. $\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n}\operatorname{Ln} z$.

**Доведення властивостей логарифмічної функції**

1. $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) =$

$= \ln(|z_1|\cdot|z_2|) + i(\mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2) =$

$= (\ln|z_1| + i\mathrm{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\mathrm{Arg} z_2) = \mathrm{Ln} z_1 + \mathrm{Ln} z_2.$

Інші властивості логарифмічної функції перевіряються аналогічно.

За допомогою показникової та логарифмічної функцій комплексної змінної можна означити *загальну показникову функцію*

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}, a \neq 0.$$

### 2.1.3. Степенева функція

1. Якщо $n \in \mathbb{N}$, то *степеневу функцію комплексної змінної* означують рівністю

$$w = z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Покладаючи $z = x + iy$ та застосовуючи формулу бінома Ньютона, можна виділити дійсну та уявну частини функції $z^n$.

Функція $z^n$ однозначна. Вона визначена та неперервна у всіх точках розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$.

2. Якщо $n = \dfrac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$, то

$$w = z^{1/m} = \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right),$$
$$k = \overline{0, m-1}.$$

Отже, функція $w = \sqrt[m]{z}$ $m$- значна. Однозначну вітку цієї функції можна виділити, підставивши замість $k$ певне значення. При $k = 0$ дістанемо головне значення функції.

3. *Загальну степеневу функцію* означують рівністю

$$w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}.$$

Функція $z^a$ означена для всіх $z \neq 0$, є многозначною функцією.

***Приклад 2.2.*** Запишемо алгебраїчну форму комплексного числа $i^{\sqrt{2}}$.

❍ $$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} =$$

$$= \cos\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}. ●$$

### 2.1.4. Тригонометричні функції

З формул Ейлера для дійсних $x$ маємо

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Звідси

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Означимо *тригонометричні функції* $\sin z$ та $\cos z$ для будь-якого комплексного числа $z$ рівностями:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Функції $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$ у комплексній площині означують формулами:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для дійсних $z=x$ тригонометричні функції комплексної змінної збігаються з тригонометричними функціями дійсної змінної. Дійсно, при $z=x$ ($y=0$), наприклад, означення синуса дає

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}((\cos x+i\sin x)-(\cos x-i\sin x))=\sin x.$$

Тригонометричні функції комплексної змінної зберігають більшість властивостей тригонометричних функцій дійсної змінної.

***Властивості.***

1. Тригонометричні функції комплексної змінної $\sin z, \cos z$ періодичні з періодом $2\pi$.

2. Для тригонометричних функцій комплексної змінної зберігаються відомі тригонометричні співвідношення.

3. $\sin z$ — непарна функція $(\sin(-z)=-\sin z)$, а $\cos z$ — парна функція $(\cos(-z)=\cos z)$.

4. Мають місце формули

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y;$$

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y.$$

5. Функція $\operatorname{tg} z$ неперервна для всіх $z\in\mathbb{C}$, за винятком $z=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, а функція $\operatorname{ctg} z$ неперервна для всіх $z\in\mathbb{C}$, за винятком $z=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ є періодичними функціями з періодом $\pi$.

Наведені властивості легко перевіряються, виходячи з означення функцій.

***Зауваження 2.1.*** На відміну від тригонометричних функцій дійсної змінної $|\sin z|$ та $|\cos z|$ можуть бути більші за одиницю. Наприклад,

$$\cos i=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\approx 1{,}543;\ \sin i=\frac{1}{2i}(e^{-1}-e)\approx 1{,}174i.$$

### 2.1.5. Гіперболічні функції

*Гіперболічні функції* $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ означують формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

З означень випливає, що функції $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ періодичні з періодом $2\pi i$, а функції $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ мають період $\pi i$.

Гіперболічні функції зв'язані із тригонометричними функціями рівностями:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$
$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \sin z = -i \operatorname{sh} iz,$$
$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,$$
$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Покладаючи в першій парі цих формул

$$iz = z',$$

отримаємо

$$\cos z' = \operatorname{ch} z, \quad \sin z' = i \operatorname{sh} z,$$

звідки випливає правило: довільне співвідношення між гіперболічними функціями $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ можна одержати з відповідних співвідношень між тригонометричними функціями $\cos z, \sin z$, замінюючи $\cos z$ та $\sin z$ відповідно на $\operatorname{ch} z$ та $i \operatorname{sh} z$.

### 2.1.6. Обернені тригонометричні функції

Число $w$ називають *арксинусом числа* $z$ (позначають $w = \operatorname{Arcsin} z$), якщо $z = \sin w$.

Використовуючи означення синуса, матимемо:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow$$
$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \Rightarrow$$
$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Мінус можна не писати, якщо розуміти корінь як двозначну функцію. Отже,

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Аналогічно означують інші обернені тригонометричні функції:

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$
$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{i - z}{i + z},\ z \neq \pm i;$$
$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z - i}{z + i},\ z \neq \pm i$$

Всі обернені тригонометричні функції є нескінченнозначними функціями.

### 2.1.7. Обернені гіперболічні функції

Функції, обернені до гіперболічних функцій, позначають відповідно $w = \mathrm{Arsh} z$ (ареасинус), $w = \mathrm{Arch} z$ (ареакосинус), $w = \mathrm{Arth} z$ (ареатангенс), $w = \mathrm{Arcth} z$ (ареакотангенс). Обернені гіперболічні функції означують рівностями

$$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$$
$$\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$
$$\mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1 + z}{1 - z}, z \neq \pm 1;$$
$$\mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{z + 1}{z - 1}, z \neq \pm 1.$$

Усі ці функції нескінченнозначні.