Лекція 12. Застосування лишків до обчислення визначених

Короткий зміст

У цій лекції:

— розглянуто застосування лишків до обчислення визначених інтегралів.

12.1. Застосування лишків до обчислення визначених інтегралів

Деякі визначені інтеграли від функцій дійсної змінної можна перетворити в інтеграл вздовж замкненого контуру від функції комплексної змінної, що дозволяє застосувати для обчислення таких інтегралів основну теорему про лишки.

Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$

де $R(u, v)$ — раціональна функція аргументів u та v.

Запровадимо комплексну змінну

$$z = e^{ix}.$$

Тоді

$$dx = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

При зміненні x від 0 до 2π точка z опише в додатному напрямі коло $|z| = 1$. Отже, заданий інтеграл переходить в інтеграл від функції комплексної змінної вздовж замкненого контуру.

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}.$$

Приклад 12.1. Обчислимо інтеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

❍ Запровадимо комплексну змінну:

$$e^{ix} = z,$$

$$dx = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Тоді

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(2+\dfrac{z^2+1}{2z}\right)}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Знаходимо особливі точки функції

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4z+1}:$$

$$z^2+4z+1=0;\, z_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}.$$

В крузі $|z|<1$ міститься лише точка $z_2=-2+\sqrt{3}$ — простий полюс. Отже,

$$\operatorname{res} f(-2+\sqrt{3})=\lim_{z\to(-2+\sqrt{3})}\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

За основною теоремою про лишки

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi i}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином,

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=-2i\cdot\frac{\pi i}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi. \bullet$$

Теорію лишків можна застосовувати також для обчислення деяких типів невласних інтегралів. Наведемо наступні теореми.

Теорема 12.1

Якщо функція $f(z)$ задовольняє умови:

1) точка $z=\infty$ є нулем $f(z)$ порядку не нижче другого, тобто ряд Лорана для цієї функції в околі точки $z=\infty$ має вигляд

$$f(z)=\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\ldots;$$

2) $f(z)$ аналітична на дійсній осі;

3) $f(z)$ аналітична у верхній півплощині $\operatorname{Im} z>0$, крім скінченної кількості точок $z_1,\ldots,z_n$,

тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k). \tag{12.1}$$

Приклад 12.2.

Обчислимо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

❍ Для функції $f(z)=\dfrac{z-1}{(z^2+1)^2}$ точка $z=\infty$ є нулем третього порядку, а точки $z_1=i$ та $z_2=-i$ полюсами другого порядку, інших особливих точок функція не має. В верхній півплощині міститься лише полюс $z_1=i$ функції $f(z)$. Обчислимо лишок функції

$$f(z)=\frac{z-1}{(z^2+1)^2}=\frac{z-1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

в цій точці:

$$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to i}\left(\frac{z-1}{(z+i)^2}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{2+i-z}{(z+i)^3}=\frac{i}{4}.$$

На підставі формули (12.1) одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(i)=-\frac{\pi}{2}.\ ●$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ іноді можна обчислити і в тому випадку, коли точка $z=\infty$ не є нулем порядку не нижче другого для $f(z)$. Справджується

Теорема 12.2

Якщо функція $f(z)$ задовольняє умови:

1) $f(z)=e^{i\alpha z}g(z)$, де $\alpha>0$ і $g(z)\to 0$, коли $z\to\infty$ та за умови $\operatorname{Im} z\geq 0$ (тобто $z\to\infty$, залишаючись у верхній півплощині або на дійсній осі);

2) $f(z)$ аналітична на дійсній осі;

3) $f(z)$ аналітична у верхній півплощині $\operatorname{Im} z>0$, крім скінченної кількості точок $z_1,\dots,z_n$,

тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k). \qquad (12.\ 2)$$

Приклад 12.3.

Обчислимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2+4x+20}.$$

❍ В даному прикладі

$$g(z)=\frac{z}{z^2+4z+20};$$

$$z^2+4z+20=0;\, z_{1,2}=-2\pm 4i.$$

Простий полюс $z_1=-2+4i$ міститься в області $\operatorname{Im} z>0$.

$$\operatorname{res} f(-2+4i)=\lim_{z\to -2+4i}\frac{ze^{iz}}{(z+2+4i)}=$$

$$=\frac{(-2+4i)e^{-4}(\cos 2-i\sin 2)}{8i}.$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20}=2\pi i\cdot\frac{(-2+4i)e^{-4}(\cos 2-i\sin 2)}{8i}=$$

$$=\frac{e^{-4}\pi}{4}\big((-2\cos 2+4\sin 2)+i(4\cos 2+2\sin 2)\big).$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2+4x+20}=\frac{\pi e^{-4}(2\cos 2+\sin 2)}{2}. \quad \bullet$$

Наведені теореми 12.1 та 12.2 вимагали відсутність особливих точок на дійсній осі (в іншому випадку інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ міг би не існувати). Але якщо $f(z)$ має на дійсній осі скінченну кількість простих полюсів, то границя

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N} f(x)dx$$

існує, а інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в цьому випадку розуміють в сенсі головного значення. Має місце

Теорема 12.3

Якщо функція $f(z)$ задовольняє умови:
1) $f(z)=e^{i\alpha z}g(z)$, де $\alpha>0$ і $g(z)\to 0$, коли $z\to\infty$ та за умови $\operatorname{Im} z\geq 0$ (тобто $z\to\infty$, залишаючись у верхній півплощині або на дійсній осі);
2) $f(z)$ аналітична у верхній півплощині $\operatorname{Im} z>0$, крім скінченної кількості точок $z_1,\ldots,z_n$;
3) $f(z)$ на дійсній осі має скінченну кількість простих полюсів $x_1,\ldots x_m$,
тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} f(x_k)\right). \quad (12.3)$$

Приклад 12.4. Обчислимо

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)}.$$

❍ Функція $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ задовольняє всі умови теореми 12.3. У верхній півплощині функція має простий полюс $z_1 = i$, а на дійсній осі — простий полюс $z_2 = 0$. Обчислюємо лишки функції $f(z)$ в особливих точках:

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{\frac{e^{iz}}{z}}{2z}\Big|_{z=i} = -\frac{1}{2e};$$

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{\frac{e^{iz}}{z^2+1}}{1}\Big|_{z=0} = 1.$$

За формулою (12.3) одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x(x^2+1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x(x^2+1)} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\right).$$

Отже,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x(x^2+1)} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right). \bullet$$