

Навчальні задачі

Навчальна задача 2.1.

Зобразити в алгебраїчній формі

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3i\right)$;

2. $\cos(2 + i)$;

3. $\text{Arctg}(1 + i)$.

○ 1.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3i\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cos 3i - \cos\frac{\pi}{3} \sin 3i = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ch } 3 - i\frac{1}{2} \text{sh } 3.$$

2.

$$\begin{aligned} \cos(2 + i) &= \frac{e^{i(2+i)} + e^{-i(2+i)}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{2i-1} + e^{-2i+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-1} (\cos 2 + i \sin 2) + e (\cos 2 - i \sin 2) \right) = \\ &= \frac{e + e^{-1}}{2} \cos 2 - i \frac{e - e^{-1}}{2} \sin 2 = \\ &= \text{ch } 1 \cos 2 - i \text{sh } 1 \sin 2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Arctg}(1 + i) &= -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1 + i(1 + i)}{1 - i(1 + i)} = \\ &= -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{i}{2 - i} = -\frac{i}{2} \text{Ln} \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \arctg 2 + (2k + 1)\pi i + \frac{i}{2} \ln \sqrt{5}, k \in \mathbb{Z}. \bullet \end{aligned}$$

Навчальна задача 2.2.

Обчислити значення функції

$$\ln(3 + 4i).$$

○ Знайдемо головне значення логарифма:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

$$\arg(3 + 4i) = \arctg \frac{4}{3},$$

$$\ln(3 + 4i) = \ln 5 + i \arctg \frac{4}{3}. \bullet$$

Навчальна задача 2.3.

Знайти модуль і аргумент числа $f(i)$, якщо

$$f(z) = (1 - i)\text{cth}z^2.$$

○ Число

$$f(i) = (1 - i)\operatorname{cth}i^2$$

можна записати як добуток двох комплексних чисел:

$$f(i) = z_1 \cdot z_2, \quad z_1 = 1 - i, \quad z_2 = \operatorname{cth}(-1).$$

Знайдемо модуль та аргумент кожного з них. Для числа $z_1 = 1 - i$ маємо

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Число z_2 є дійсним, причому від'ємним, оскільки

$$\operatorname{cth}(-1) = -\frac{\operatorname{ch}1}{\operatorname{sh}1} = -\frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} < 0.$$

Тому

$$|z_2| = \operatorname{cth}1, \quad \arg z_2 = \pi.$$

Отже,

$$|f(i)| = |z_1| |z_2| = \sqrt{2}\operatorname{cth}1;$$

$$\arg f(i) = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{3\pi}{4}. \quad \bullet$$

3. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1.

Обчислити значення показникової функції:

1. $e^{\frac{\pi}{2}i}$;
2. e^{-1+2i} ;
3. e^{-8-7i} .

1. i ;

○ 2. $e^{-1} \cos 2 + ie^{-1} \sin 2$; ●

3. $e^{-8} \cos 7 - ie^{-8} \sin 7$.

Задача 2.2.

Обчислити значення тригонометричних функцій:

1. $\sin(1 + 2i)$;
2. $\cos 3i$.

○ 1. $\sin 1 \operatorname{ch}2 + i \cos 1 \operatorname{sh}2$; ●

2. $\operatorname{ch}3$.

Задача 2.3.

Знайти $|z|$ та $\arg z$, якщо $z = i \sin^2 \frac{1}{i}$.

○ $|z| = \operatorname{sh}^2 1$; $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. ●

Задача 2.4.

Обчислити значення гіперболічних функцій:

$$1. \operatorname{th} \left(\ln 3 + \frac{\pi i}{6} \right);$$

$$2. \operatorname{sh} (-1 + 5i).$$

$$\circ 1. \frac{80}{91} + \frac{9\sqrt{3}}{91} i; \quad \bullet$$

$$2. \cos 3 \operatorname{sh} 2 + i \sin 3 \operatorname{ch} 2.$$

Задача 2.5.

Знайти значення логарифмічних функцій:

$$1. \ln e;$$

$$2. \operatorname{Ln}(1 + i).$$

$$1. 1;$$

$$\circ 2. \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}. \quad \bullet$$

Задача 2.6.

Обчислити

$$1. \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{1-i};$$

$$2. (3 + 4i)^{i-2}.$$

$$\circ 1. \frac{e}{\sqrt{2}} (1 - i);$$

$$2. \frac{e^{-\left(\arctg \frac{4}{3} + 2\pi k\right)}}{25} \left(\cos \left(\ln 5 - 2 \left(\arctg \frac{4}{3} + 2\pi k \right) \right) + \right.$$

$$\left. + i \sin \left(\ln 5 - 2 \left(\arctg \frac{4}{3} + 2\pi k \right) \right) \right), k \in \mathbb{Z}. \quad \bullet$$

Задача 2.7.

Розв'язати рівняння:

$$1. z^2 + i = 0; \quad 2. e^{-z} + 1 = 0;$$

$$3. 4 \cos z = 5; \quad 4. \ln(z + i) = 0.$$

$$\circ 1. \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2. (2k + 1) \pi i, k \in \mathbb{Z};$$

$$3. (2k + 1) \pi \pm i \ln 2, k \in \mathbb{Z}; \quad 4. 1 - i. \quad \bullet$$

Задача 2.8.

Довести:

$$1. \sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$2. \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$