Навчальні задачі

Навчальна задача 12.1.

Обчислити інтеграли:

1. $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$;

2. $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin xdx}{x^2+4x+20}$;

3. $I_3 = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}$ $(0 < a < 1)$.

❍ 1. Знайдемо особливі точки функції $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$:

$$z^2+4z+13=0; z_{1,2} = -2 \pm 3i \quad \Rightarrow$$

$$(z^2+4z+13)^2 = (z+2-3i)^2(z+2+3i)^2.$$

В верхній півплощині міститься лише точка $z_1 = -2+3i$, яка є полюсом 2-го порядку для $f(z)$. Отже,

$$\mathrm{res} f(-2+3i) = \lim_{z\to -2+3i}\left(\frac{z}{(z+2+3i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -2+3i} \frac{2+3i-z}{(z+2+3i)^3} = \frac{4}{-216i} = \frac{i}{54}.$$

Тому

$$I_1 = 2\pi i \cdot \frac{i}{54} = -\frac{\pi}{27}.$$

2. Маємо

$$I_2 = \mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20}$$

$$f(z) = \frac{z}{z^2+4z+20};$$

$$z^2+4z+20=0; z_{1,2} = -2 \pm 4i.$$

Простий полюс $z_1 = -2+4i$ міститься в області $\mathrm{Im}\, z > 0$.

$$\mathrm{res} f(-2+4i) = \lim_{z\to -2+4i} \frac{ze^{iz}}{(z+2+4i)} =$$

$$= \frac{(-2+4i)e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)}{8i}.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20} = 2\pi i \cdot \frac{(-2+4i)e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)}{8i} =$$

$$= \frac{e^{-4}\pi}{4}\left((-2\cos 2 + 4\sin 2) + i(4\cos 2 + 2\sin 2)\right).$$

А тому

$$I_2 = \frac{\pi e^{-4}(2\cos 2 + \sin 2)}{2}.$$

3. Запровадимо комплексну змінну:

$$e^{ix} = z, dx = \frac{dz}{iz}, \cos x = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Тоді

$$I_3 = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1 + a\dfrac{z^2+1}{2z}\right)} = -2i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

$$f(z) = \frac{1}{az^2+2z+a}.$$

Знаходимо особливі точки

$$az^2+2z+a=0; z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

В крузі $|z|<1$ міститься лише точка $z_1 = \dfrac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$ — простий полюс. Отже,

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}} \frac{1}{a\left(z + \frac{\sqrt{1-a^2}+1}{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}.$$

Таким чином,

$$I_3 = -2i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \bullet$$

Задачі для самостійного розв’язання

Задача 12.2.

Обчислити інтеграли:

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx.$

$$3.\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}.$$

❍ 1. $\frac{3}{8}\pi$;

2. $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$;

3. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. ●