Навчальні задачі

Навчальна задача 3.1.

Перевірити, які з наведених функцій є оригіналами:

1. $f(t) = \sin t \cdot 1(t)$;
2. $f(t) = \dfrac{1}{t-9} \cdot 1(t)$;
3. $f(t) = e^{t^2} \cdot 1(t)$.

❍ 1. Оскільки $|\sin t| \le 1 = e^{0t}$, то функція $\sin t$ є оригіналом з показником росту $s_0 = 0$.

2. Функція $f(t) = \dfrac{1}{t-9}$ не є оригіналом, оскільки в точці $t = 9$ вона має розрив другого роду.

3. Функція $f(t) = e^{t^2} \cdot 1(t)$ не є оригіналом, оскільки не виконується умова 3 в означенні оригінала — функція зростає швидше показникової функції e^{st}: при довільному фіксованому s, починаючи з деякого достатньо великого t

$$e^{-st} \cdot e^{t^2} = \frac{e^{t^2}}{e^{st}} > 1 \quad (s_0 = +\infty).$$ ●

Навчальна задача 3.2.

Показати, що функція $f(t) = e^{(2-i)t}$ є оригіналом. Зобразити графічно область існування її зображення.

❍ Функція $f(t) = e^{(2-i)t} \cdot 1(t)$ неперервна, дорівнює нулеві $\forall t < 0$, справедлива оцінка

$$\left|e^{(2-i)t}\right| = e^{2t}\left|e^{-it}\right| \le Me^{2t}, M \ge 1, s_0 = 2.$$

Тому дана функція є оригіналом з показником росту $s_0 = 2$. Зображення оригіналу існує в області $\operatorname{Re} p > s_0 = 2$ (рис. 3.1). ●

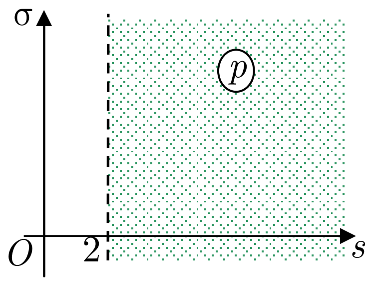


Рис. 3.1

Навчальна задача 3.3.

Знайти (за означенням) зображення

$$f(t) = e^{(1-i)t}.$$

❍ Функція $f(t)$ є оригіналом ($s_0 = 1$).

$$e^{(1-i)t} \risingdotseq \int_0^\infty e^{(1-i)t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-1+i)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{p-1+i} e^{-(p-1+i)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-1+i},$$

оскільки

$$\left| e^{-(p-1+i)t} \right| = e^{-(\operatorname{Re} p - 1)t} \to 0$$

коли $t \to \infty$, за умови $\operatorname{Re} p > 1$. Отже,

$$e^{(1-i)t} \risingdotseq \frac{1}{p-1+i}. \bullet$$

Навчальна задача 3.4. Знайти (за означенням) зображення функції $f(t) = t \cdot 1(t-1)$.

❍ За означенням

$$f(t) \risingdotseq \int_0^\infty t \cdot 1(t-1) \cdot e^{-pt} dt.$$

Оскільки

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

тому

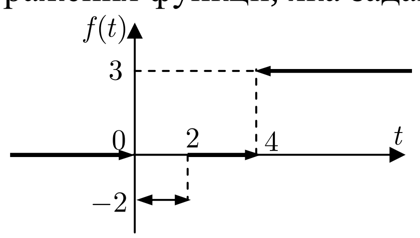
$$1(t-1) = \begin{cases} 1, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Отже,

$$f(t) \risingdotseq \int_1^\infty t \cdot e^{-pt} dt = t \cdot \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{e^{-pt}}{p} dt =$$

$$= \frac{1}{p} e^{-p} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_1^\infty = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \bullet$$

Навчальна задача 3.5. Знайти зображення функції, яка задана графічно:



❍ Запишемо аналітичний вираз заданої функції $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ -2, 0<t<2;\\ 0, 2\le t<4;\\ 3, & t>4.\end{cases}$$

Знайдемо зображення заданої функції:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^2 -2e^{-pt}dt+\int_4^{\infty} 3e^{-pt}dt=\frac{2}{p}e^{-pt}\Big|_0^2-$$

$$-\frac{3}{p}e^{-pt}\Big|_4^{\infty}=\frac{2}{p}e^{-2p}-\frac{2}{p}+\frac{3}{p}e^{-4p}=\frac{2e^{-2p}-2+3e^{-4p}}{p},\quad \operatorname{Re} p>0.$$ ●

Навчальна задача 3.6. Знайти зображення

$$t^{\alpha},\quad \alpha>-1.$$

❍ При $\alpha>-1$ функція $f(t)=t^{\alpha}$ є оригіналом ($s_0=0$). Тому

$$t^{\alpha} \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot t^{\alpha}dt=\left|\begin{matrix} pt=u\\ dt=\dfrac{du}{p}\end{matrix}\right|=\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot\frac{u^{\alpha}}{p^{\alpha}}\cdot\frac{du}{p}=$$

$$=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot u^{\alpha}du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\quad \operatorname{Re} p>0,$$

де $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ – гамма-функція.

Таким чином,

$$t^{\alpha} \risingdotseq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$ ●

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. З'ясувати, які з наведених функцій є оригіналами:

1) $f(t)=e^{3t}\sin 2t\cdot 1(t)$;
2) $f(t)=e^{(1-3i)t}\cdot 1(t)$;
3) $f(t)=\dfrac{t}{t-25}\cdot 1(t)$;
4) $f(t)=e^{t^3}\cdot 1(t)$.

❍ 1) оригінал; 2) оригінал;
3) не є оригіналом; 4) не є оригіналом. ●

Задача 3.2. Показати, що наведені функції є оригіналами та знайти показник їх росту:

1. $f(t) = e^{(-1+3i)t}$;

2. $f(t) = t\sin\dfrac{1}{t}$;

3. $f(t) = \mathrm{ch}\,(4-3i)\,t$;

4. $f(t) = t^3$.

❍ 1. оригінал, $s_0 = -1$; 2. оригінал, $s_0 = 0$; 3. оригінал, $s_0 = 4$; 4. оригінал, $s_0 = 0$. ●

Задача 3.3. Знайти (за означенням) зображення наступних функцій:

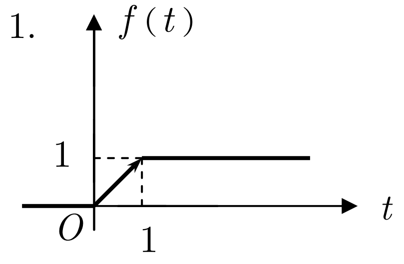
1. $f(t) = t^2$;

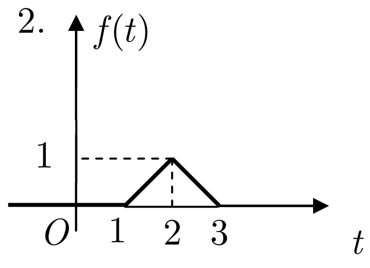
2. $f(t) = e^{-t}$;

3. $f(t) = \sin 2t$.

❍ 1. $\dfrac{2}{p^3}$; 2. $\dfrac{1}{p+1}$; 3. $\dfrac{2}{p^2+4}$. ●

Задача 3.4. Знайти зображення функції $f(t)$, яка задана графічно:





❍ 1. $\dfrac{1-e^{-p}}{p^2}$; 2. $\dfrac{e^{-p}-2e^{-2p}+e^{-3p}}{p^2}$. ●

Задача 3.5. Знайти зображення функцій:

1. $f(t) = t^{\frac{3}{2}}$; 2. $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$.

❍ 1. $\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\dfrac{1}{p^{5/2}}$; 2. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$. ●